Государственное учреждение
дополнительного профессионального образования
«Институт развития образования Забайкальского края»

Методический сборник

«Технологический пакет как средство реализации системно-деятельностного подхода в образовательной деятельности педагога»

Чита
ИРО Забайкальского края
2018

ББК
УДК

Технологический пакет как средство реализации системно-деятельностного подхода в образовательной деятельности педагога: методический сборник / сост. Л.К. Портнова. – Чита: ИРО Забайкальского края, 2018. – с.

В методическом сборнике представлен инновационный опыт педагогов Забайкальского края в виде технологических пакетов. Технологический пакет представляет набор образовательных технологий, способствующих в процессе образовательной деятельности, развитию таких качеств личности обучающихся как учебная самостоятельность, инициативность, ответственность. Реализация образовательных технологий позволяет эффективно решать задачи ФГОС нового поколения, ориентированные на субъект-субъектные отношения участников образовательных отношений.

Методический сборник предназначен для педагогов, специалистов, руководителей, методистов системы общего образования.

ИРО Забайкальского края, 2018

Содержание

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПАКЕТ
ПО ПРОБЛЕМНО-МОДУЛЬНОМУ ОБУЧЕНИЮ

Технологический пакет модельной образовательной практики

Общая информация о представляемом технологическом пакете модельной образовательной практики	
1.Ульзутуева Светлана Алексеевна	учитель математики
2.Наименование образовательной организации	Государственное образовательное учреждение «Забайкальский краевой лицей интернат»
3. Адрес, телефон, e-mail	Забайкальский край, г. Чита, ул. Ленина, 2 E- mail: usa68-68@mail.ru
4. Адрес сайта в Интернете	blog.zabedu.ru/matem/

1. Наименование модельной образовательной практики.
Проблемно-модульное обучение на уроках математики
2. Тип технологического пакета модельной образовательной практики— локальный
3. Общая информация о модельной образовательной практике

Гибкая технология проблемно - модульного обучения это синтез проблемного обучения, исследовательской деятельности, индивидуализации обучения.

Суть технологического пакета использование в обучении конкретных учебных ситуаций, ориентирующих обучающихся на формулирование проблемы и поиск вариантов ее решения с последующим разбором на учебных занятиях

Цель технологического пакета помочь каждому учащемуся определить собственный уникальный путь освоения знания, который ему более всего необходим.

Задачи технологического пакета максимальное вовлечение каждого ученика в самостоятельную работу по решению поставленной проблемы или задачи

Плюсы технологического пакета: при проблемно модульном изложении материала учащиеся получают краткое сообщение о предстоящей работе, где они должны собрать и проанализировать информацию, необходимую для принятия решения. Индивидуализация обучения. С помощью индивидуализации ученики имеют возможность проявить и усовершенствовать аналитические и оценочные навыки, научиться работать

в команде, находить наиболее рациональное решение поставленной проблемы.

Стратегии поведения учителя в ходе работы:

1) учитель будет давать ключи к разгадке в форме дополнительных вопросов или дополнительной информации.
2) в определенных условиях учитель будет сам давать ответ.
3) учитель может ничего не делать, (оставаться молчаливым) пока кто-то работает над проблемой

4. Научное обоснование модельной образовательной практики.

Базовая технология - гибкая технология проблемно-модульного обучения по М.О. Чошанов.

Замыкающая технология: Технология индивидуализации обучения (И.Э. Унт, В.Д. Шадриков).

Базовая онтологема, теоретическая идея, лежащая в основе пакета:

В условиях реализации технологии проблемно-модульного обучения старшеклассники осуществляют поиск знаний и способов деятельности, испытывая при этом увлеченность идеей и процессом учения; они осуществляют познавательную самостоятельность и творческую активность.

Мотивом учебного процесса может служить интерес, наличие внутреннего противоречия, вызывающего потребность, стремление школьника к исследованию неопределенности, которая связана с неизвестными ему знаниями. Условием возникновения у субъекта деятельности внутреннего противоречия является проблемная ситуация. Фиксация проблемной ситуации (вычленение основного противоречия) выражается в формулировке проблемы – в цели исследования. Целеполагание становится движущей силой тогда, когда цель субъективно важна и значительна для участника этого процесса.

Мотив ⟶ Противоречие ⟶ Проблема ⟶ Цель

Базовая инфраструктура:

В трудах современных педагогов и математиков (А.Д. Александров, П.К. Анохин, Ю.К. Бабанский, Л. Берталанфи, Я.И. Груденов, В.А. Гусев, М.И. Махмутов, А.А. Столяр и др.) исследовательская деятельность обучающихся выполняет роль наиболее эффективного средства активизации учебного процесса при обучении математике. Теоретическая значимость и новизна предлагаемой технологии состоит в том, что в ней принципы системного квантования, проблемности и модульности рассматриваются в целостности, в органическом единстве. Технология включает в себя целевую компоненту, ведущие принципы, специальные способы проектирования содержания обучения, систему задач и упражнений, особенности конструирования дидактических материалов, осуществление рейтинговой системы контроля и оценки учебных достижений обучающихся.

В связи с этим, одним из средств развития интеллектуальной и творческой деятельности ученика могут стать специально конструируемые системы математических задач, в частности, открытого типа. Как правило, это задачи повышенного уровня сложности или задачи «творческого» характера. Термин «открытая задача», связанный не с контролем, а непосредственно с процессом обучения, вводит автор дидактической эвристики А.В. Хуторской. Под открытыми задачами понимаются «задания, у которых нет, и не может быть заранее известных решений или ответов». Отсутствие заранее определенного решения, готового ответа стимулирует школьников к самопознанию, реализации своего творческого потенциала. Открытые задания предполагают лишь возможные направления. Получаемый же учеником результат уникален и отражает степень его творческого самовыражения. Поэтому под открытыми задачами мы понимаем такие задачи, которые имеют несколько вариантов решения, предполагают возможность уникальных ответов или позволяют ученикам самостоятельно открывать неизвестные им факты, а также учитывают их индивидуальные возможности. Цель постановки таких заданий – максимально вовлечь учащихся в творческую познавательную деятельность.

5. Область изменений (предмет деятельности, изменений)

1. Информационный пакет представлен классификациями и условиями выбора методов обучения. Ведущим выбран метод обучения через задачи. В Концепции развития математического образования в Российской Федерации в настоящее время основным средством обучения математике поставлена чёткая цель и указано средство её достижения - умение решать задачу, архитектура которой включает в себя: условие (предметная область, отношение между объектами предметной области) → требование (найти или доказать, или взвесить значения между объектами), между условием и требованием находится оператор (система операций, выполнение которых обеспечит достижения требования).

Существуют различные подходы к классификации методов обучения, различают классификации, в основу которых положены следующие признаки:

- источники познания (вербальные, наглядные, практические методы обучения);
- методы логики (аналитико-синтетический, индуктивный, дедуктивный методы обучения);
- тип обучения (объяснительно-иллюстративные, проблемно-развивающиеся методы обучения);
- уровень познавательной самостоятельности учащихся (репродуктивные, продуктивные, эвристические методы обучения);
- уровень проблемности (показательный, монологический, диалогический, эвристический, исследовательский, алгоритмический, программированный методы обучения);
- дидактическая цель и функции (стимулирования, организации и контроля);
- различные виды деятельности преподавателя (организация самостоятельной учебной деятельности) и др.

Исходя из этого, основополагающим является развитая воля обучающего (если не я за себя, то кто за меня, но если я только за себя, то зачем я). Поэтому учебный процесс это процесс во времени, процесс формирования и развития психологических новообразований в структуре личности обучаемого (речь идёт о развитии логической памяти, логического внимания, воображения, способности к логическим построениям, способности рефлексировать, осуществлять самоконтроль, саморегуляцию и др.). Обучающего нужно научить видеть связи между фактами в мире методов, в мире дефиниций, иначе мозг станет не развитым, память будет бесконечно мала. В основу должен быть положен принцип формирования у обучающегося обобщённых мотивов к учению. Такие мотивы направляют его на самоизменение, поскольку сердцевина таких мотивов проста (я это должен понять, я это должен усвоить, я это должен научиться применять) Принцип обучения школьников в «зоне ближайшего развития», т.е. ставить обучаемого в такую ситуацию, когда он сам начинает видеть проблему, более того, формулирует её и находит решение с помощью учителя, при этом, учитель работает вместе с обучающимся, но не вместо него. Другими словами обучающего нужно ставить в позицию «исследователя».

Принцип организации целенаправленной учебной деятельности:

- у обучающегося сформированы обобщённые мотивы учения (применять то, что усвоил);
- учебный процесс направлен на усвоение обучающимися способов действия (методы, способы решения задач);
- рефлексивный характер рассмотрения обучающимся собственных действий;
- идея насыщения учебного процесса ориентированными основами действий, системой ориентиров к работе (задан вектор направления).

В математике эффективны такие ориентиры как:

1) правила, которые записаны языком моделирования

2) блок-схемы содержания, граф-схемы, компакт-схемы, алгоритмы:

-отыскания числа решений системы двух линейных уравнений (блок-схема)

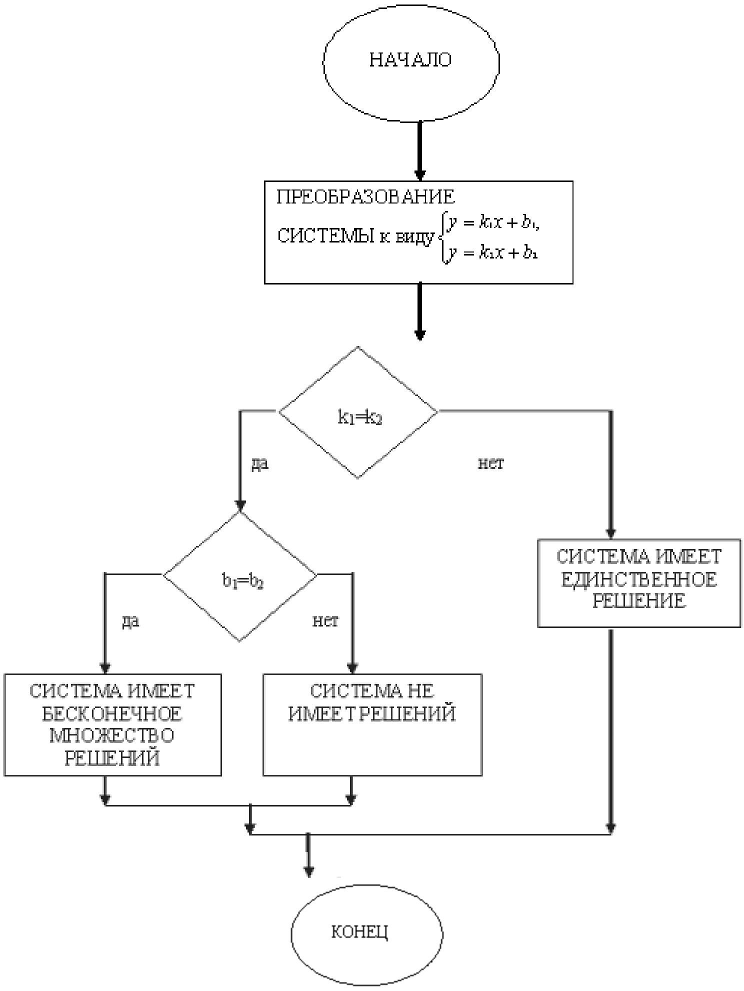


Рис. 1. Графический способ задания алгоритмы

2.Табличный способ задания алгоритма можно продемонстрировать на примере таблицы, составляемой для исследования функций и дальнейшего построения графиков (см. рис. 2).

Исследование функции и построение графика

Функция задана уравнением *y = f(x)*. Исследовать функцию и построить ее график.

1. Таблица исследования функции

Значение X	$(-\infty, X_0)$	X_0	$(X_0, +\infty)$
$f'(X)$	+	0	-
f (X)	↗	$У_0$	↘

2. Построение графика

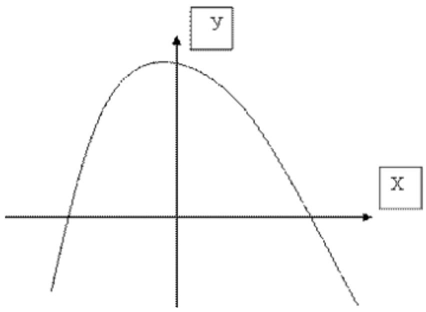


Рис. 2. Табличный способ задания алгоритма

4.Пример формульного способа задания – последовательность нахождения компонентов при составлении уравнения касательной к графику той или иной функции

Уравнение касательной к графику функции

Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) Вычислить значение функции в точке $x = x_0$, т.е. $f(x_0)$;
2) Найти производную функции $f'(x)$;
3) Вычислить значение производной в точке x_0, т.е $f'(x_0)$;
4) Подставить числа x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$ в уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и записать ответ.

Словесный способ задания алгоритма используется практически во всех правилах выполнения действий, например, правило сложения чисел с разными знаками.

Алгоритм сложения чисел с разными знаками

Чтобы сложить два числа с разными знаками нужно:

1) Поставить знак большего модуля;
2) Из большего модуля вычесть меньший модуль.

Пример. $-5 + 3 = -(5 - 3) = -2$

В старших классах работа становится разнообразней и содержательней, появляется возможность предполагающая включать упражнения разного типа и уровня сложности, предполагающая, что приемы деятельности могут быть разной степени сложности и обобщенности. Они состоят из большого числа действий, выполнение которых приводит к применению алгоритмов на отдельных этапах работы.

Идея «свободы выборов» (Л.В.Занков) − дифференциация и индивидуализация учебного процесса (внутренняя и внешняя) базовый уровень и углублённый уровень, по дозе помощи обучающему (разный объём как подачи материала, так и подачи задач). Идея сближения школьного курса математики с наукой в аспекте методологии (речь об использовании в школьной математике как и в науке гипотетико-дедуктивного метода: наблюдение → догадка → гипотеза→ верификация, т.е. либо опровергнуть, либо доказать истинность того или иного утверждения). Введение новаций как в науке, из потребности практики, или в силу развития учебной мысли. Таковыми в учебном процессе являются:

1. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение ставить цели работы.

Первый уровень – цель задачи «озвучена» в формулировке и сформулирована на языке математики.

Задача. Существует ли параллелограмм, в котором две стороны и диагональ соответственно равны 5см, 2см, 2см?

Цель задачи: доказать существование параллелограмма, в котором две стороны и одна диагональ соответственно равны 5см, 2см, 2см.

Второй уровень – цель задачи не «озвучена» в формулировке, но сформулирована на языке математики.

Задача 1. Почему одна диагональ параллелограмма всегда больше другой?

Цель задачи: доказать, что одна диагональ параллелограмма всегда больше другой.

Задача 2. Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две части?

Цель задачи: доказать истинность или ложность утверждения, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две части.

Третий уровень – цель задачи не «озвучена» в формулировке, задача не сформулирована на языке математики.

Задача. Где в прямоугольном дачном участке нужно поставить столб для фонаря, чтобы все углы участка были освещены одинаково?

Цель задачи: найти точку внутри прямоугольника, равноудаленную от его вершин.

2. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение анализировать условия заданной ситуации.

Первый уровень – условия, описывающие заданную ситуацию, 1) сформулированы явно, 2) не содержат противоречия, 3) не содержат избыточных данных.

Задача: существует ли треугольник, если одна из его сторон равна 4см, вторая на 2см меньше, а третья в 2 раза больше?

Второй уровень – в условии задачи нарушено одно из требований 1) – 3).

Задача. Можно ли найти периметр равнобедренного треугольника, если известны его высота и одна из его сторон?

В условии задачи есть неопределенность: не указано, какая сторона треугольника известна. Для ответа на поставленный вопрос необходимо рассмотреть два случая: а) известно основание треугольника, б) известна боковая сторона треугольника.

Задача 2. Можно ли найти периметр прямоугольного равнобедренного треугольника, если его катеты равны $5a$, гипотенуза – $12a$?

В условии задачи есть противоречие с неравенством треугольника:

Пример 3. Можно ли найти все стороны равнобедренного треугольника, если две его стороны относятся как 3:8, периметр равен 38см, а одна сторона на 10см больше другой?

В условии задачи имеются избыточные данные: для нахождения всех сторон треугольника достаточно одной из следующих комбинаций данных: а) периметр и разность сторон, б) периметр и отношение сторон, в) отношение и разность сторон.

Третий уровень – хотя бы часть условий, характеризующих геометрическую ситуацию, учащиеся выводят самостоятельно.

Задача: при каком условии четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если векторы AB и CD равны?

В задаче необходимое условие: векторы AB и CD не лежат на одной прямой; достаточное условие: вектор AB не перпендикулярен вектору CD, $|AB| =|CD|$.

3. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение выдвигать и обосновывать гипотезы.

Первый уровень – задачи, удовлетворяющие требованиям:

1) для выдвижения гипотезы достаточно 1- 2 проб;

2) доказательство гипотезы основывается на одной известной теореме;

3) отсутствует необходимость построения математической модели (задача сформулирована на языке математики).

Задача. Два равных прямоугольных треугольника приложили один к другому таким образом, что их гипотенузы совпали, а неравные острые углы приложили один к другому. Каков вид получившегося при этом четырехугольника?

Для определения виды четырехугольника достаточно одной пробы, а доказательство гипотезы: «Получившийся четырехугольник – прямоугольник» основывается на теореме о сумме углов треугольника.

Второй уровень – задачи, в которых нарушены требования 1) -2).

Задача. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежат противоположной стороне. Какова зависимость между смежными сторонами данного параллелограмма?

Для доказательства гипотезы: «Одна смежная сторона в два раза больше другой» требуется применить теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей, а также свойства равнобедренного треугольника.

Третий уровень – задачи, в которых нарушены требования 1) – 3).

Пример. Два пешехода P и Q равномерно идут по прямолинейным отрезкам. Какую линию описывает середина отрезка PQ придвижении пешеходов?

Для решения задачи учащимся необходимо:

- построить математическую модель ситуации и переформулировать задачу на язык математики;

- провести 2-3 пробы с целью выдвижения гипотезы, применяя знания о взаимном расположении двух прямых на плоскости;

- доказать гипотезу, используя понятия «вектор», «длина вектора», правило сложения векторов, а также знания из курса физики (уравнение равномерного прямолинейного движения материальной точки).

4. Разноуровневые открытые задачи, развивающие умение планировать решение проблемы.

Первый уровень – задачи, в которых учащимся

1) известен алгоритм решения задачи;

2) не требуется построение математической модели.

Пример. Как найти периметр равнобедренного треугольника, если известна его высота и основание?

Второй уровень – задачи, алгоритм которых неизвестен.

Пример. Как, зная сумму и разность длин двух отрезков, найти эти длины?

Третий уровень – задачи прикладного характера, алгоритм решения которых неизвестен.

Пример. Кузнечик прыгает по прямой большими и малыми прыжками. Большой прыжок составляет 12см, а малый – 7см. Как ему попасть из точки *O* в точку *A*, находящуюся от *O* на расстоянии 3см?

5.Разноуровневые задачи, развивающие умение критически анализировать результат.

Первый уровень – задачи, в которых требуется выяснить:

1) верно ли утверждение (можно опираться, пользуясь одной теоремой свойством, определением) или верно ли решение задачи (приводится безошибочное решение).

Пример:. Верно ли утверждение: «Если два угла равны, то они вертикальные?».

Второй уровень – задачи, в которых требуется выяснить:

1) верно ли утверждение, пользуясь несколькими теоремами (свойствами, определениями);

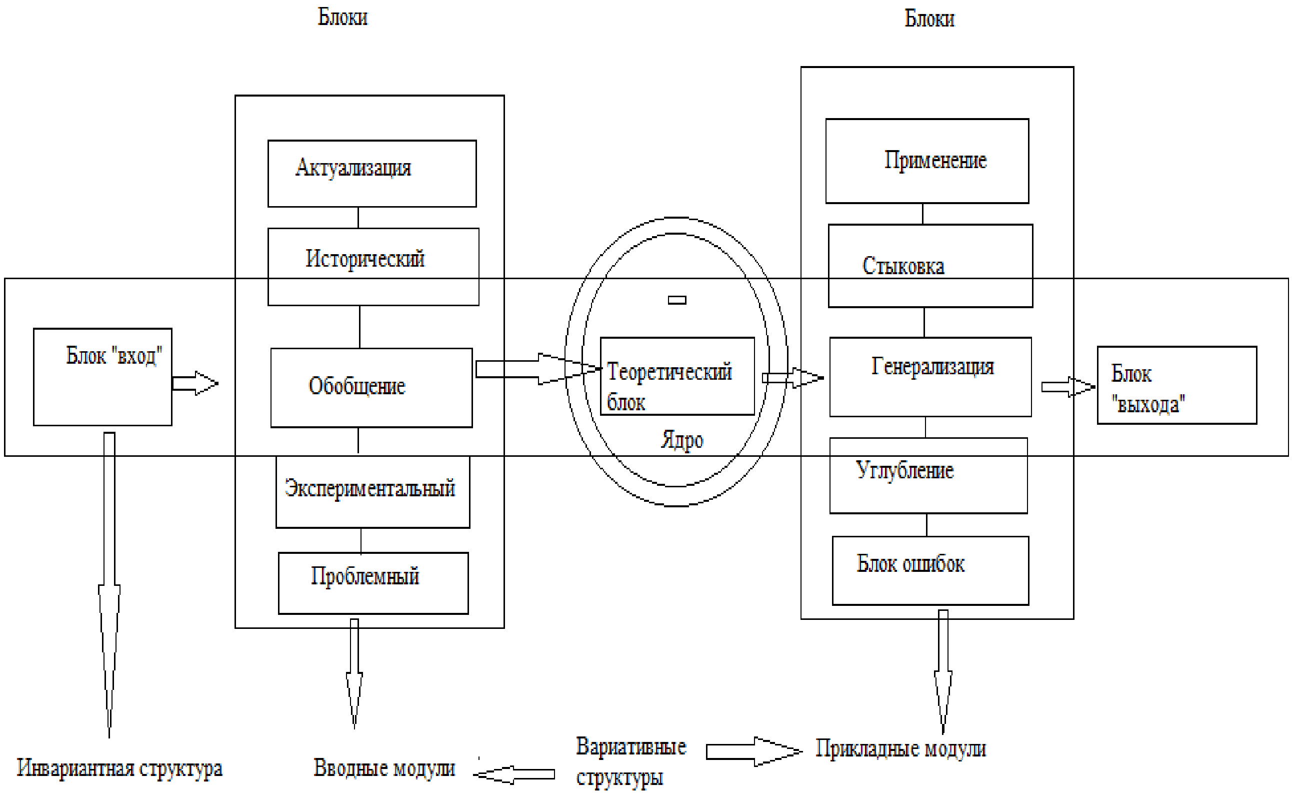
2) верно ли решение задачи (решение содержит логическую ошибку).

Пример: «На плане с масштабом 1:10000 изображен прямоугольник, имеющий на плане стороны 2 и 3. Вычислить площадь этого прямоугольника в натуральную величину»?

Третий уровень – задачи, в которых требуется выяснить, рационально ли приведенное решение. Ответ обосновать (предложить еще один вариант решения задачи).

Открытые задачи можно использовать на всех этапах обучения в качестве устных упражнений (преимущественно задачи первого уровня), групповых или индивидуальных заданий (классных и домашних), заданий для проведения зачета по теме. Такие задачи позволяют глубже и прочнее усвоить теоретический материал, повышают интерес к изучению геометрии, служат пропедевтикой исследовательской деятельности, развивают такие важные качества мышления, как критичность, гибкость, нестандартность, способствуют овладению учащимися приемами анализа, синтеза, сравнения, обобщения, прививают навыки творческой деятельности. Разный уровень открытых задач позволяет дифференцировать обучение, что способствует гуманизации образования.

2. Общая структура гибкой технологии проблемного обучения



Основная дидактическая единица *блока «вход»* является осуществление *актуализирующего* контроля. Главной особенностью этого контроля заключается не только в том, что его прохождение означает переход к следующему уровню умения обучающегося, но прежде всего в том, что задачи разных уровней умения предполагают актуализацию тех опорных знаний и способов действий, которые необходимы для усвоения содержания всего проблемного модуля. Наряду с этим актуализирующие контрольные задания снабжены соответствующими указателями, отсылающими обучающегося к учебному материалу, знания которого необходимо для успешного выполнения, либо консультация учителя.

Исторический блок представляет собой краткий экскурс, раскрывающий генезис понятия, теоремы, задачи с анализом возникавших при этом ошибок посредством постановки проблемы и т.д.

Блок актуализации включает опорные понятия и способы действий, необходимые для усвоения нового материала, представленного в проблемном модуле.

Экспериментальный блок содержит описание учебного материала, для вывода гипотез, алгоритма, закона и т.д.

Проблемный блок выполняет функцию постановки укрупнённой проблемы, на решение которой и направлен весь модуль.

Блок обобщения выполняет функцию первичного системного представления содержания.

Основной учебный материал проблемного модуля располагается в *теоретическом блоке*. Учебные элементы (блоки- схемы) этой части модуля отличаются от других элементов и имеют свою логику построения: 1) дидактическая цель; 2) формулировка проблемы (задачи); 3) обоснование гипотезы; 4) решение проблемы; 5) контрольный тест.

Блок применения включает в себя систему задач на отработку новых способов действий и применение изученного на других задачах в измененной форме и на практике.

Блок стыковки представляет собой решение более сложного уровня задач, базовые задачи которых были осуществлены в проблемном блоке, а также точки пресечения пройденного материала с содержанием смежных предметов.

Блок углубления содержит задачи повышенной сложности (второго уровня) и предназначен для учащихся, проявляющих интерес к математике.

Блок «выход» служит своего рода «контролером». Обучающийся не выполнивший того или иного требования блока «выход». Возвращается к тому уровню задач, в котором допустил большее количество ошибок, при этом данный блок рассчитывается как для слабого, так и для сильного обучающегося.

Вывод:

практика применения проблемного модуля показывает, что для слабых обучающихся целесообразно рекомендовать полный вариант, который содержит блоки, входящие в инвариантную структуру, а также следующие блоки: актуализации, исторический, экспериментальный, применения и блок ошибок, которые расширяют эмпирическую базу учебной информации, направленную на обеспечение доступности проблемного модуля, на первом уровне умений.

Сокращённый вариант может содержать блоки инвариантной структуры, а также проблемный блок и блок стыковки, соответствует второму уровню умений, поэтому его рекомендуют средним обучающимся .

Углублённый вариант отличается от сокращённого наличием блока углубления и рекомендуется для наиболее подготовленных и сильных обучающихся, на третьем уровне умений.

5.1. Ожидаемые результаты реализации модельной практики

Результаты собственного исследования.

При подборе упражнений, предназначенных для углубления содержания основного курса алгебры, необходимо ориентироваться на его основные содержательные линии.

Элементы теории множеств и математической логики

- Свободно оперировать[1] понятиями: множество, характеристики множества, элемент множества, пустое, конечное и бесконечное множество, подмножество, принадлежность, включение, равенство множеств, способы задание множества;
- задавать множества разными способами;
- проверять выполнение характеристического свойства множества;
- свободно оперировать понятиями: высказывание, истинность и ложность высказывания, сложные и простые высказывания, отрицание высказываний; истинность и ложность утверждения и его отрицания, операции над высказываниями: и, или, не; условные высказывания (импликации);
- строить высказывания с использованием законов алгебры высказываний.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

- строить рассуждения на основе использования правил логики;
- использовать множества, операции с множествами, их графическое представление для описания реальных процессов и явлений, при решении задач других учебных предметов.

Числа

Свободно оперировать понятиями: натуральное число, множество натуральных чисел, целое число, множество целых чисел, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанное число, рациональное число, множество рациональных чисел, иррациональное число, корень степени n, действительное число, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; переводить числа из одной системы записи (системы счисления) в другую; доказывать и использовать признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 3, 6, 9, 10, 11 суммы и произведения чисел при выполнении вычислений и решении задач; выполнять округление рациональных и иррациональных чисел с заданной точностью; упорядочивать числа, записанные в виде обыкновенной и десятичной дроби, числа, записанные с использованием арифметического квадратного корня, корней степени больше 2; находить НОД и НОК чисел разными способами и использовать их при решении задач; выполнять вычисления и преобразования выражений, содержащих действительные числа, в том числе корни натуральных степеней.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

выполнять и объяснять результаты сравнения результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближенных вычислений, используя разные способы сравнений; составлять и оценивать разными способами числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов.

Тождественные преобразования

Свободно оперировать понятиями степени с целым и дробным показателем; выполнять доказательство свойств степени с целыми и дробными показателями; оперировать понятиями «одночлен», «многочлен», «многочлен с одной переменной», «многочлен с несколькими переменными», коэффициенты многочлена, «стандартная запись многочлена», степень одночлена и многочлена; свободно владеть приемами преобразования целых и дробно-рациональных выражений; выполнять разложение многочленов на множители разными способами, с использованием комбинаций различных приемов; использовать теорему Виета и теорему, обратную теореме Виета, для поиска корней квадратного трехчлена и для решения задач, в том числе задач с параметрами на основе квадратного трехчлена; выполнять деление многочлена на многочлен с остатком; выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни, корни степени n; выполнять различные преобразования выражений, содержащих модули. $\left(\sqrt{x^k}\right)^2 = x^k$

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

выполнять преобразования и действия с буквенными выражениями, числовые коэффициенты которых записаны в стандартном виде; выполнять преобразования рациональных выражений при решении задач других учебных предметов; выполнять проверку правдоподобия физических и химических формул на основе сравнения размерностей и валентностей.

Уравнения и неравенства

Свободно оперировать понятиями: уравнение, неравенство, равносильные уравнения и неравенства, уравнение, являющееся следствием другого уравнения, уравнения, равносильные на множестве, равносильные преобразования уравнений; решать разные виды уравнений и неравенств и их систем, в том числе некоторые уравнения 3 и 4 степеней, дробно-рациональные и иррациональные; знать теорему Виета для уравнений степени выше второй; понимать смысл теорем о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений и уметь их доказывать; владеть разными методами решения уравнений, неравенств и их систем, уметь выбирать метод решения и обосновывать свой выбор; использовать метод интервалов для решения неравенств, в том числе дробно-рациональных и включающих в себя иррациональные выражения; владеть разными методами доказательства неравенств; решать уравнения в целых числах.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты.

Функции

Свободно оперировать понятиями: функциональная зависимость, зависимая и независимая переменные, способы задания функции, область определения и множество значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность функции, наибольшее и наименьшее значения, четность/нечетность функции, периодичность функции, график функции, вертикальная, горизонтальная, наклонная асимптоты; график зависимости, не являющейся функцией; строить графики функций: линейной, квадратичной, дробно-линейной, степенной при разных значениях показателя степени, $y = |x|$; использовать преобразования графика функции, анализировать свойства функций и вид графика в зависимости от параметров; использовать метод математической индукции для вывода формул, доказательства равенств и неравенств, решения задач на делимость; решать комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

конструировать и исследовать функции при решении задач других учебных предметов, интерпретировать полученные результаты в соответствии со спецификой учебного предмета.

Статистика и теория вероятностей

Выбирать наиболее удобный способ представления информации, адекватный ее свойствам и целям анализа; вычислять числовые характеристики выборки; свободно оперировать понятиями: случайный опыт, случайный выбор, испытание, элементарное случайное событие (исход), классическое определение вероятности случайного события, операции над случайными событиями, основные комбинаторные формулы; решать задачи на вычисление вероятности в том числе с использованием формул.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

представлять информацию о реальных процессах и явлениях способом, адекватным ее свойствам и цели исследования; анализировать и сравнивать статистические характеристики выборок, полученных в процессе решения прикладной задачи, изучения реального явления, решения задачи из других учебных предметов; оценивать вероятность реальных событий и явлений в различных ситуациях.

Текстовые задачи

Решать простые и сложные задачи, а также задачи повышенной трудности и выделять их математическую основу; распознавать разные виды и типы задач; использовать разные краткие записи как модели текстов сложных задач и задач повышенной сложности для построения поисковой схемы и решения задач, выбирать оптимальную для рассматриваемой в задаче ситуации модель текста задачи; различать модель текста и модель решения задачи, конструировать к одной модели решения сложных задач разные модели текста задачи; знать и применять три способа поиска решения задач (от требования к условию и от условия к требованию, комбинированный); моделировать рассуждения при поиске решения задач с помощью граф-схемы; выделять этапы решения задачи и содержание каждого этапа; уметь выбирать оптимальный метод решения задачи и осознавать выбор метода, рассматривать различные методы, находить разные решения задачи, если возможно; анализировать затруднения при решении задач; выполнять различные преобразования предложенной задачи, конструировать новые задачи из данной, в том числе обратные; интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи; изменять условие задач (количественные или качественные данные), исследовать измененное преобразованное; анализировать всевозможные ситуации взаимного расположения двух объектов и изменение их характеристик при совместном движении (скорость, время, расстояние) при решении задач на движение двух объектов как в одном, так и в противоположных направлениях, конструировать новые ситуации на основе изменения условий задачи при движении по реке; исследовать всевозможные ситуации при решении задач на движение по реке, рассматривать разные системы отсчета; решать разнообразные задачи «на части»; решать и обосновывать свое решение задач (выделять математическую основу) на нахождение части числа и числа по его части на основе конкретного смысла дроби; объяснять идентичность задач разных типов, связывающих три величины (на работу, на покупки, на движение), выделять эти величины и отношения между ними, применять их при решении задач, конструировать собственные задач указанных типов; владеть основными методами решения задач на смеси, сплавы, концентрации, использовать их в новых ситуациях по отношению к изученным в процессе обучения; решать задачи на проценты, в том числе, сложные проценты с обоснованием, используя разные способы; решать логические задачи разными способами, в том числе, с двумя блоками и с тремя блоками данных с помощью таблиц; решать задачи по комбинаторике и теории вероятностей на основе использования изученных методов и обосновывать решение; решать несложные задачи по математической статистике; овладеть основными методами решения сюжетных задач: арифметический, алгебраический, перебор вариантов, геометрический, графический, применять их в новых по сравнению с изученными ситуациях.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

конструировать новые для данной задачи задачные ситуации с учетом реальных характеристик, в частности, при решении задач на концентрации, учитывать плотность вещества; решать и конструировать задачи на основе рассмотрения реальных ситуаций, в которых не требуется точный вычислительный результат; решать задачи на движение по реке, рассматривая разные системы отсчета; конструировать задачные ситуации, приближенные к реальной действительности.

Измерения и вычисления

Свободно оперировать широким набором формул на вычисление при решении сложных задач; самостоятельно формулировать гипотезы и проверять их достоверность.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

свободно оперировать формулами при решении задач в других учебных предметах и при проведении необходимых вычислений в реальной жизни.

Методы математики

Владеть знаниями о различных методах обоснования и опровержения математических утверждений и самостоятельно применять их; владеть навыками анализа условия задачи и определения подходящих для решения задач изученных методов или их комбинаций; характеризовать произведения искусства с учетом математических закономерностей в природе, использовать математические закономерности в самостоятельном творчестве.

5.2. Технологическая карта реализации модельной практики (какие изменения содержания образования, технологии, методов, средств или форм предусматривает описываемая практика)

Решение задач на уроках математики – важнейшее средство формирования умения проводить исследовательскую деятельность.

«Учитель как организатор, как куратор творческой деятельности школьников должен быть осведомлен о том, каковы этапы творческой деятельности. Это знание позволит учителю стимулировать творческий процесс, осторожно вмешиваясь, встраиваясь в него, оказывая нужное влияние на школьников» (В.О.Гордон).

В.О. Гордон выделяет следующие этапы творческой деятельности:

- «завязка» (интеллектуальное столкновение с проблемой);
- эмоционально-логический хаос (первые размышления о решении задачи);
- «инкубационный» период (скрытая внутренняя работа, осознание задачи);
- кульминация (инсайт, озарение);
- «развязка» (конкретика решения, реализация решения, запись решения).

В.О. Гордон предлагает рассматривать звенья процесса творчества, как более детальное представление о творческом процессе:

1) «…столкновение с новым, ощущение отсутствия знания, видение обрыва мысли;
2) творческая неопределенность: ясна проблема, неясен путь ее решения;
3) скрытая работа;
4) звено эвристика;
5) звено нахождения решения;
6) звено критики (звено контроля правильности найденного пути);
7) звено реализации идеи;
8) звено развития результата;
9) звено окончательного воплощения замысла.

Учитель имеет возможность подключаться к звеньям 1, 2, 3, 4, 6. Его помощь заключается в том, чтобы акцентировать проблему, подсказать, дать совет по выбору метода решения, помочь пройти по несостоятельным идеям, насыщать сознание противоречиями. Помогать школьнику – это значит, в частности, вместе с ним разбирать идеи, ведущие в тупик».

Пример.

Числа ($3a$ +1) и ($4a$ + 1) являются полными квадратами. Простым или составным является число ($11a$ + 5)?

Помощь учителя может заключаться в следующем:

- подчеркнуть, что ($4a$ + 1) – нечетное число и является полным квадратом;
- рассмотреть случаи четности и нечетности а, если а - нечетное, то ($11a$ + 5) четное, следовательно, и составное;
- если a – четное, тогда…..

Приложение 1

Решение задач – важнейшее средство формирования умения проводить поисковую и исследовательскую деятельность

Математика как предмет имеет большие возможности по формированию опыта исследовательской работы. Умение решать задачи – основа для этого. Учитель, желающий обучать детей исследовательской работе, должен начать с обучения решению задач. Учитель, научивший своих учеников методам решения задач, имеет право вовлекать своих учеников в поисковую и исследовательскую деятельность.

Решение задач в математическом образовании занимает огромное место. Обучению решения задач уделяется много внимания, но, пожалуй, самый распространенный способ такого обучения – показ способов решения определенных видов задач и значительная, порой изнурительная практика по овладению ими. Нас интересует не этот подход. Чтобы сформировать у школьников умение успешно решать задачи, необходимо дать им необходимые сведения о сущности задач и их решений, что позволит школьнику осознавать свою собственную деятельность при решении задач. Необходимо стимулировать постоянный анализ учащимися своей деятельности по решению задач, выделению в них общих подходов и методов, их теоретического осмысления и обоснования.

Для того чтобы научиться решать задачи, надо много поработать. Но эта работа не сводится лишь к решению большого количества задач. Надо научиться такому подходу к задаче, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а ее решение – как объект конструирования и изобретения.

Составные части задачи.

Задача представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, учитывая те условия, которые указаны в задаче. Перед началом решения задачи необходимо провести анализ: установить, в чем состоят ее требования, каковы условия, исходя из которых, надо решать задачу. Анализ задачи всегда направлен на требование задачи. Умение анализировать задачу, проникать в ее сущность – это главное в общем умении решать задачу.

Задача. Сколько цифр содержит число 2^{100} (в десятичной системе счисления)?

Формулировка этой задачи состоит из одного вопроса. Но, вдумавшись в этот вопрос, можно вычленить такие условия:

1) 2^{100} есть натуральное число;
2) его можно записать обычным образом в виде многозначного числа.

Требование этой задачи: найти, сколько цифр содержит запись этого многозначного числа.

В более сложных задачах рассмотренный выше анализ целесообразно продолжить. А именно установить, как устроены (из чего состоят) вычлененные условия.

Задача. К двум окружностям, радиусы которых 4 и 6, проведены внутренние общие касательные, оказавшиеся взаимно перпендикулярными. Вычислить расстояние между центрами окружностей.

Эта задача содержит такие условия:

1) дана окружность с центром в точке O_1 радиуса 4;

2) из центра O_2 проведена окружность радиуса 6;
3) у этих окружностей есть общие внутренние касательные;
4) эти касательные взаимно перпендикулярны.

Анализируя эти условия, можно заметить, что каждое из них состоит из одного или нескольких объектов и некоторой их характеристики. Если дан один объект, то указывается его характеристика в виде некоторого свойства этого объекта; если же даны два объекта, то характеристикой служит некоторое отношение этих объектов.

Анализ таких задач проводится по такой форме: условия – объекты условия – их характеристики.

Результаты предварительного анализа задач лучше всего фиксировать в виде таблицы или какой-то схемы. Схематическая запись задачи отличается широким использованием в ней разного рода обозначений, символов, букв; в ней четко выделены все условия и требования задачи, а в записи каждого условия указаны объекты и их характеристики; в ней зафиксировано лишь то, что необходимо для решения задачи, ненужные подробности отбрасываются.

Примеры таблиц для некоторых видов задач.

1) задачи на движение:

v	t	S

2) задачи на совместную работу:

N	t	A

3) задачи на проданный продукт:

цена	количество	стоимость

Для схематической записи некоторых задач, например, задач на движение или геометрических задач полезно использовать чертеж.

Требования к чертежу:

- чертеж представляет собой схематический рисунок основного объекта задачи с обозначением с помощью букв и других знаков всех элементов фигуры и некоторых их характеристик;
- чертеж должен соответствовать задаче;
- при построении чертежа нет необходимости строго выдерживать определенный масштаб, но желательно соблюдать какие-то пропорции в построении отдельных элементов фигуры;
- при построении чертежей пространственных фигур необходимо соблюдать все правила черчения таких фигур.

Классификация задач:

- по характеру объектов: практические (реальные) и математические;
- по отношении к теории: стандартные и нестандартные;
- по характеру требования: нахождение (распознавание) искомых, преобразование или построение, доказательство или пояснение.

Сущность и структура решения математических задач.

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче,- ее ответ.

Этапы процесса решения задачи:

1 этап – анализ задачи: определить, что это за задача, каковы ее условия, в чем состоят ее требования.

2 этап – схематическая запись задачи: оформление, запись анализа в виде разного рода схем.

3 этап – поиск способа решения: на основе анализа задачи и ее схематической записи выбрать способ решения.

4 этап – осуществление способа решения.

5 этап – проверка решения задачи: необходимо убедиться, что решение правильное, что оно удовлетворяет всем требованиям задачи.

6 этап – исследование задачи: установить, при каких условиях задача имеет решение и притом, сколько различных решений в каждом отдельном случае, при каких условиях задача вообще не имеет решения и т. д.

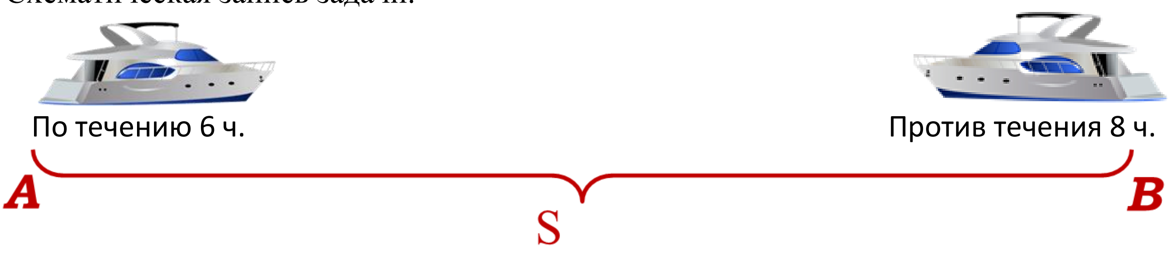
7 этап – формулирование ответа: убедившись в правильности решения, произведя исследование, четко сформулировать ответ.

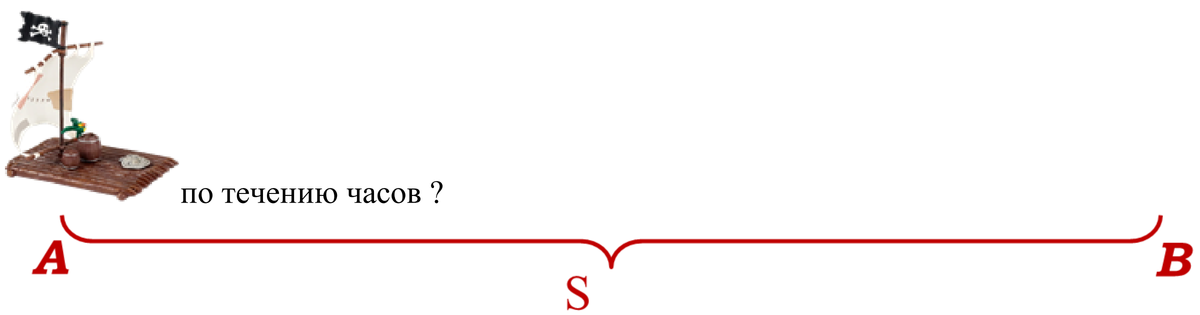
8 этап – анализ решения: установить, нет ли другого, более рационального способа решения, нельзя ли задачу обобщить, какие выводы можно сделать из этого решения.

Задача. Лодка прошла по течению реки расстояние между двумя пристанями за 6 часов, а обратный путь за 8 часов. За сколько времени пройдет расстояние между пристанями плот, пущенный по течению реки?

1. Анализ задачи. Объекты: лодка и плот. Лодка имеет собственную скорость, река и плот имеют определенную скорость течения. Поэтому время, затраченное на движение по течению меньше, чем время, затраченное на движение против течения. Но расстояние между пристанями неизвестно, собственная скорость лодки и скорость течения тоже неизвестны. Но искать надо не эти величины, а время, за которое плот пройдет расстояние между пристанями.

2. Схематическая запись задачи.





3. Поиск способа решения. Надо найти время движения плота между пристанями. Для этого надо знать расстояние между пристанями и скорость течения реки. Оба они неизвестны, поэтому обозначим расстояние буквой *S*, а скорость течения буквой *a* км/ч. Нужна еще собственная скорость лодки, обозначим ее *v* км/ч. Из этого следует план решения: составить систему уравнений относительно введенных величин.

4. Решение задачи. Пусть расстояние *AB* равно *S* км, скорость течения реки *a* км/ч, собственная скорость лодки v км/ч, а искомое время движения плота равно x часов. Тогда скорость лодки по течению реки равна $(v + a)$ км/ч. За 6 ч, идя с этой скоростью, прошла путь AB, следовательно $6(v + a) = s$. Против течения эта лодка идет со скоростью $(v - a)$ км/ч и путь AB она проходит за 8 ч, поэтому $8(v - a) = s$. Наконец, плот, плывя со скоростью, *a* км/ч, покрыл расстоя-

ние s за x ч, следовательно, $ax=s$. Полученные уравнения образуют систему относительно неизвестных s, a, v, x. Так как требуется найти лишь x, остальные неизвестные постараемся исключить. $v + a = \frac{s}{6}$, $v - a =$.

Вычитая из 1 уравнения 2, получим: $2a = \frac{s}{6} - \frac{s}{8}$, отсюда $a = \frac{s}{48}$. Подставим полученное выражение для a в 3 уравнение: $\frac{s}{48}x = as$. Отсюда: $x=48$.

5. Проверка решения. Достаточно проверить, будут ли равны собственные скорости лодки, найденные разными способами.

6. Исследование задачи. В данном случае этот этап не нужен.

7. Ответ. Плот проплывет расстояние между пристанями за 48 ч.

8. Анализ решения. Решение задачи было сведено к решению системы 3 уравнений с четырьмя неизвестными. Однако найти надо было лишь одно. Возможно приведенное решение не самое удачное, хотя и достаточно простое.

Для стандартных задач есть правила, пользуясь которыми можно найти решение задачи определенного вида:

- словесное правило:

Пример. Степень произведения равна произведению степеней множителей.

Это правило позволяет установить такую программу – последовательность шагов для решения любой задачи нахождения степени произведения:

1) установить все сомножители произведения,

2) найти данную степень каждого из этих множителей,

3) результаты 2-го шага перемножить.

- правило – формула:

Пример: решение квадратных уравнений.

- правило – тождество.

Пример: формулы сокращенного умножения.

Особенности решения стандартных задач:

- анализ сводится к распознаванию вида задач,

- поиск решения состоит в составлении программы шагов на основе общего правила,

- решение такой задачи состоит в применении этой общей программы к условиям данной задачи.

Для того, чтобы решать стандартные задачи, школьник должен:

- помнить все изученные общие правила и положения, их полезно записывать в справочники;

- уметь развертывать свернутые общие правила, формулы, тождества, определения, тождества в программы – последовательность шагов решения задач определенного типа.

Задача учителя состоит в том, чтобы научить школьника на основе общих положений и правил, заложенных в память и записанных в справочник, развертывать их в программы решения задач определенного типа.

Для формирования умения исследовательской деятельности учащихся особый интерес представляют нестандартные задачи. Это такие задачи, для которых нет общих правил и положений, определяющих точную программу их решения.

При решении нестандартных задач последовательно применяются две операции:

- сведение (путем преобразования или переформулирования) нестандартной задачи к другой, ей эквивалентной, но уже стандартной задаче;

- разбиение нестандартной задачи на несколько стандартных подзадач.

В зависимости от характера задачи можно использовать либо одну из этих операций, либо обе.

Пример. При каких значениях переменной *у* значение суммы дробей $\frac{y+2}{y+3}$и $\frac{y+5}{y-3}$равно значению их произведения?

Решение. Найдем сумму заданных дробей, затем их произведение. Сравним полученные две дроби. Значения дробей будут равны при тех значениях переменной у, при которых числители равны, а знаменатели не равны нулю. Следовательно, надо решить уравнение: $y^2 - 1 = 0$ при условии $y^2 - 9 \neq 0$. Уравнение имеет корни 1 и -1. Ответ: у=-1;1.

Процесс решения состоит в следующем: данную задачу разбиваем на подзадачи:

1) нахождение суммы двух дробей,
2) нахождение произведения двух дробей,
3) решение квадратного уравнения,
4) проверка выполнения условия неравенства нулю знаменателей дробей.

Решив эти 4 стандартные задачи, мы решаем и исходную нестандартную задачу.

Поиск плана решения задач.

Приступая к решению задачи, сразу нельзя сказать стандартная она или нет. Чтобы решить ее надо найти план решения. Задача учителя помочь школьнику научиться этому. Начинать решение необходимо с определения вида задачи.

Виды задач, решаемых в курсе математики, в зависимости от характера требования задачи:

1. Задачи на нахождение искомого.

Этот класс задач чрезвычайно многочисленный и разнообразный. Рекомендация по выбору решения: свести задачу к какому-либо виду уравнений, неравенств или их систем.

2. Задачи на доказательство или объяснение.

3. Задачи на преобразование или построение.

Виды задач по характеру объектов: практические и математические.

Виды задач по отношению к теории: стандартные и нестандартные.

Рекомендации для поиска плана решения нестандартных задач.

1. Свести задачу к ранее решенным задачам.
2. Если в задаче можно выделить части, которые представляют собой легко решаемые самостоятельные задачи, то эти части можно выделить в виде подзадач, их решить, после чего преобразовать исходную задачу, имея в виду полученные результаты решения подзадач. После такого преобразования исходная задача становится проще.
3. При решении следить, чтобы полностью использовать каждое из данных условий.
4. Не жалейте сил и времени на анализ задачи, ищите для данной задачи подобные ей, чем-либо похожие на нее среди решенных вами ранее. Используйте эти аналоги как возможные идеи решения.

Моделирование в процессах решения задач.

Психолог С.Л. Рубинштейн, изучая процесс решения задач, характеризовал его как процесс переформулирования задач, в котором непрерывно производится анализ условий и требований задачи через синтетический акт их соотнесения. Здесь анализ (разложение, разбор) есть метод научного исследования путем разложения (фактического или мысленного) предмета на его составные части, а синтез (соединение, составление) есть метод изучения предмета в его целостности, в единстве и взаимной связи его частей.

В ходе переформулирования задачи создаются новые задачи, являющиеся моделями той ситуации, которая описывается в исходной задаче. Переформулирование задачи является способом ее моделирования. Метод моделирования состоит в том, что для исследования какого-либо явления или объекта выбирают или строят другой объект, в каком-либо отношении подобный данному. Построенный или выбранный объект изучают и с его помощью решают исследовательские задачи, а затем результаты решения задач переносят на первоначальное явление или объект.

Пример. Задача Ньютона.

Трава на лугу растет одинаково быстро и густо. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров 0 за 60 дней. Сколько коров поели бы траву за 96 дней?

Решение. Эта задача, текстовая. Для того, чтобы ее решить, надо составить уравнение или систему уравнений, которые представляют собой модель данной задачи.

Заданные в задаче величины – количество коров и число дней – не связаны непосредственно, поэтому введем вспомогательные неизвестные – параметры – для установления связи между основными величинами.

Пусть на лугу было *«а»* единиц травы, и ежедневно на нем вырастает *«в»* единиц травы. Пусть каждая корова за 1 день съедает *«с»* единиц травы. Тогда в соответствии с условием получаем.

За 24 дня всего вырастает *(а+24в)* единиц травы, которую за это время съедают 70 коров. Они съедают *24*70*с = 1680с*, следовательно,

а + 24в = 1680с. По условию, что 30 коров съедают всю траву за 60 дней, получаем:

а + 60в = 1800с.

За 96 дней на лугу вырастет всего *а + 96в* единиц травы, которую съедят искомое х число коров, они съедят всего *96хс* единиц травы, следовательно, получим такое уравнение: *а + 96в = 96хс*.Полученные уравнения образуют систему, которая и есть модель исходной задачи. Эту систему нам нужно решить относительно искомого *х*.

Вычтем почленно из уравнения 2 уравнение 1, получим: *36в = 120с*. Отсюда *с =, 3в*. Подставим полученное значение с в уравнение 1: *а + 24в = 504в,* отсюда *а = =480в*.Подставим выражения *«с»* и *«а»* в уравнение 3, получим: *480в + 96в = 28,8хв* или *576в = 28,8хв*, отсюда, поделив предварительно на *«в»,* найдем: *х = 20*.

Ответ: 20 коров.

Рекомендации для поиска решения математических задач:

1. Прочтя задачу, надо попытаться установить, к какому виду она принадлежит.
2. Если вы узнали в ней стандартную задачу знакомого вида, то примите для нее решения известное вам общее правило.
3. Если же задача не является стандартной, то следует действовать в следующих направлениях:

а) вычленить из задачи подзадачу или разбить ее на несколько подзадач стандартного вида (способ разбиения);

б) ввести в условие вспомогательные элементы: вспомогательные параметры, вспомогательные построения (способ вспомогательных элементов);

в) переформулировать ее, заменить ее другой равносильной задачей (способ моделирования).

4. Для того, чтобы легче было осуществить указанные способы, полезно предварительно построить наглядную вспомогательную модель задачи – ее схематическую запись.
5. Решение нестандартных задач есть искусство, которым можно овладеть лишь в результате глубокого постоянного самоанализа действий по решению задач и постоянной тренировки в решении разнообразных задач.

Помните, что решение задач есть вид творческой деятельности, а поиск решения есть процесс изобретательства.

Список литературы

1. Чошанов, М.А. Гибкая технология проблемно-модульного обучения: методическое пособие /М.А. Чошанов. – М.: Народное образование, 1996. – 160с., ил.-

2. Гордон, В.О. Лекции по методике математики для учителей профильной школы. 2010 – 2015.

3. Громова, Т.В. Руководителю НИР школьников: /Т.В.Громова Практика административной работы в школе. – 2006. -№6. – с.59-64.

4. Далингер, В.А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике: учебное пособие/ В.А. Далингер. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2015.

5. Крысин, А.Я. и др. Поисковые задачи по математике (4-5 классы): Пособие для учителей / А.Я. Крысин, В.Н. Руденко, В.И. Садкова, А.В. Соколова, А.С. Шепетов, Ю.М. Колягин. – М.: «Просвещение», 2016.

6. Русанов, В.М. Математические олимпиады школьников / В.М. Русанов. – М.: «Просвещение», 2010.

7. Фарков, А.В. Учимся решать олимпиадные задачи. Геометрия. 5-11 классы/ А.В. Фарков. – М.: Айрис-пресс, 2016.

8. Фридман, Л.М. и др., Как научиться решать задачи: учебное пособие/ Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. - М.: «Просвещение», 2015.

9. Гальперин, П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий. — Исследования мышления в советской психологии/ П. Я. Гальперин, Введение в психологию – М., 1976.