МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ № 6 (805)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

Чебышев П.Л.

МАТЕМАТИКИ НА КАРТЕ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

Методический журнал
для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издается совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте РАУМ:
raum.math.ru/node/179

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru

Иллюстрации:
elibron.com,
wikiwand.com, tcheb.ru,
archive.li, visualrian.ru,
msu.ru, litfund.ru,
etomesto.ru, imesta.info,
dic.academic.ru,
tecnografica.net

Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437 от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 19.07.2019
Тираж: 3000 экз.
Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
statgrad.org/#2619
ISSN 2658-4042

В НОМЕРЕ

К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

СОГЛАСНО ПРИНЦИПУ РЕЗИЛЬЕНТНОСТИ

Л. РОСЛОВА

В конце июня в Государственной Думе состоялись парламентские слушания по теме «О мерах по повышению качества образования в Российской Федерации». Собравшиеся в зале представители федеральных и региональных административных и образовательных структур, педагогической науки и практики напрасно ждали разговоров о новых горизонтах школьного образования, позволяющих достичь иного его качества, скорейшего внедрения прорывных технологий, анализа причин стабильности высоких достижений начальной школы, механизма успеха резильентных школ. Список можно продолжить...

Массы проблем коснулась в своем докладе министр образования, но большая их часть затрагивала такие вопросы, как горячие завтраки и теплые туалеты. Факторы, безусловно, важные, но разве они характеризуют понятие «качество образования»? Они относятся к понятию «уровень жизни». Он ведь характеризуется не только объемом реальных доходов в расчете на душу населения, но и степенью обеспеченности людей материальными благами. Сводить качество образования к материально-техническим вопросам обеспечения школы — все равно, что вернуться к пониманию образования как сферы услуг. И хотя министр много раз утверждала, что не является сторонником этой концепции, факты говорят об обратном.

И еще вопросы заработной платы учителя. Да, сложилась безумная ситуация, когда учителя уезжают работать в соседние регионы, потому что там за те же самые часы и отчеты зарплаты выше. Надо из нее выходить. Надо искать решение проблемы, а не обсуждать. И не подгонять решение под известный ответ: чтобы залатать дыру с нехваткой учителей, не надо повышать ставку работающего учителя, заставляя его работать бесплатно «за того парня», надо создавать условия, чтобы учителя, ушедшие или не дошедшие, возвращались в школы. Каждый должен решать проблемы согласно своему функционалу, а не перекладывать их на других.

Ожидания были иными. Хотелось честного анализа аттестационных процедур; на фоне неоспоримых достижений в плане повышения их надежности и объективности оценки хотелось честного анализа характера их влияния на качество подготовки выпускников. Хотелось разговора о стандартах.

Из позитивного, что явно способно отразиться на качестве образования, это анонсированное освобождение учителя из отчетного плена. Но будет ли это освобождение? Или лет через 100? Как от монгольского ига или крепостного права?

По оценкам специалистов, в России не более 5% резильентных школ. Не соглашусь: мне кажется, что других у нас просто нет.

Н. СТРЕЛКОВА,
г. Москва

Статья написана по мотивам доклада, сделанного автором на семинаре [19]

ИГРЫ НА УРОКЕ И КРУЖКЕ

Занятия математикой иногда можно проводить в формате игры. Наверное, самая известная подборка правил подобных игр содержится в разделе «Математические соревнования» книги «Ленинградские математические кружки» [1]. Там же есть замечание для преподавателей, с которого я хотела бы начать: «Помните, что школьники, особенно в младших классах, очень любят превращать серьезное дело в игру, в спортивное развлечение. На первых порах это вполне приемлемо и может использоваться как один из путей для знакомства ребят с новой для них математикой. Однако это ни в коем случае не должно превратиться в основное направление деятельности кружка, иначе он превратится в аттракцион».

Сейчас разнообразие используемых игровых форматов огромно, существуют соревнования по самым разным правилам [2, 3] и целые турниры математических игр [4–7].

Когда обсуждаешь правила старой игры или придумываешь новую, возникают десятки вопросов: В чем будет игровая цель? За что и как начислять баллы? Проверять только ответы или решения тоже? Проверять по мере поступления или в конце «раундов»? Какими должны быть команды по составу? Выдавать задачи сразу все? По одной? Или блоками? Разрешать ли исправлять ошибку?

Возникают и десятки идей: Может, ребята должны отгадать кодовое слово, получая буквы за решенные задачи? Или пусть они получают слова, из которых в конце составят условие главной задачи? Здорово же будет! Может, стоит напечатать монетки и выдавать за правильные ответы? Напечатать условия на разноцветной бумаге? А может, нарисовать на доске лабиринт и передвигать по нему магнитики — фишки команд? Сделать шахматное или футбольное поле, передвигать фигуры или мяч? Или предложить ребятам покупать задачи за «тугрики», выбирая сложность и тему? Разрешить обмен условиями задач между командами, организовать перемещения между уровнями или локациями?

Мой ответ на все эти вопросы: «Да — можно и так». Почти любая комбинация с задачами, баллами и командами даст игру, часто — веселую. Но есть вопрос: «А зачем? Зачем то или иное правило? Зачем играть в эту игру? Зачем вообще играть?» Думаю, важно, чтобы все эти «зачем» проводящий игру себе задавал.

Все зависит от поставленных целей, от взглядов учителя на процесс обучения, а цели и взгляды могут быть самыми разными. Как писал Пойя: «Не так уж важно, какова на самом деле ваша точка зрения: гораздо важнее, есть ли у вас вообще какая-нибудь точка зрения на данный предмет или ее у вас вовсе нет. И очень важно то, насколько активно вы стараетесь проводить в жизнь свою точку зрения» [8, гл. 14, § 5].

Каждая из моих игр служит определенной цели, на которой я концентрируюсь, стараясь убрать лишнее. Отталкиваясь от известных мне игровых форматов, я меняю и часто упрощаю их.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Игра для меня, как и вообще любой формат урока, — вещь индивидуальная и непостоянная. Мои цели меняются, меняется ситуация, и я модифицирую существующие игры и придумываю новые. Правила некоторых игр долгое время кажутся мне идеально подобранными, но тем не менее перед каждым занятием я пытаюсь заново оценить формат и ситуацию и нередко (перед занятием или по ходу его) вношу изменения даже в давно проверенный формат.

Призываю и читателя относиться к описанным ниже форматам критически и творчески.

Черный ящик

Эта игра — часть фольклора математических кружков и летних школ. «Черный ящик» уместен не только на кружке, но и на уроке. Помогает осознать понятие функции (отображения), области определения, допустимых и недопустимых значений, а также поработать с конкретными функциями.

На доске рисуется«черный ящик», участникам сообщается, что ящик умеет преобразовывать помещаемые в него объекты по некоторому закону, который необходимо угадать. Участники игры спрашивают, что можно положить в «черный ящик», и ведущий сообщает, что, например, ящик готов обрабатывать любые трехзначные числа. Участники по очереди спрашивают, что получится, если положить в ящик конкретные числа. Например: «Сколько получится, если положить 123?» (6), «А 534?» (12), «А 167?». «Кто-нибудь уже понял, сколько получится?» («Может, 14?» — «Нет, 42»).

Игра продолжается. Если кто-то из участников считает, что понял закономерность, он ни в коем случае не должен описывать ее вслух. Вместо этого он начинает отвечать на вопросы других участников. Если ведущий с ним соглашается, это свидетельствует о том, что участник понял закономерность. Пока остальные продолжают думать, отгадавшим участникам можно предложить записать правило в тетради словами или формулой, а также придумать свои загадки. Если у учителя нет других планов, то в следующем раунде ведущим становится участник, первым отгадавший предыдущую функцию. Но учитель может и нарушить это правило: загадать несколько нужных ему функций и затем переключиться на другой формат.

Ответ. В приведенном примере игры в «Черный ящик» первые ответы удовлетворяли двум естественным функциям: $f(xyz) = x + y + z$ и $f(xyz) = yz$.Однако последний ответ, $f(167) = 42$, позволяет предположить, что загадавший имел в виду вторую функцию (произведение цифр в разрядах десятков и единиц).

Плюс пять, минус два

Это простой формат для решения задач на ответ. Цель: создать ситуацию, в которой школьники будут стараться проверить свой ответ, а в случае неправильного ответа — искать ошибку, разбираться, доводить задачу до победного конца! При желании можно отработать задачи «с подвохом», с несколькими случаями и т.д.

Школьники работают в парах. Все получают одинаковые задачи, решают их в произвольном порядке и по мере решения сдают только ответы, без решений. Учитель проверяет ответы. За верный ответ команда получает +5 баллов, за неверный –2 балла. Число попыток сдать верный ответ по задаче не ограничено, баллы за попытки суммируются. Например, если по задаче было три неверных попытки, команда получает за эту задачу «–6», а если со второй попытки был сдан правильный ответ, команда получает $-2 + 5 = +3$ балла.

Баллы удобно записывать в таблицу на доске, по строкам — команды, по столбцам — номера задач. Чаще всего я поручаю запись баллов самим участникам игры. Смотрю ответ, говорю, верно или нет, и школьник идет к доске и ставит нужный балл в соответствующую ячейку. Школьники с этим прекрасно справляются, а у учителя масса других обязанностей: проверять ответы, пояснять условия, решать другие текущие вопросы — кто-то слишком шумит, кто-то унывает, кто-то решил узнать ответы у другой команды. Кстати, общение между командами категорически запрещено правилами игры. За шум можно команды оштрафовать, создав столбец «Штраф» в таблице и поставив в него, например, «–1».

Важное правило: учитель не объясняет участникам, в чем заключается их ошибка, а лишь ставит «–2». Ошибку команда ищет сама. Нередко оказывается, что ошибок несколько, и команда исправляет их последовательно. Тем радостнее бывает в конце концов получить «+5».

Один человек может успешно проводить игру сразу с 15 командами при условии, что заранее подготовлен полный список правильных ответов, причем ответы легки для проверки, а задачи и игра не вызывают у группы шквала вопросов по условиям и правилам.

Возможно проведение игры по учебным задачам (например, по алгебре) со сдачей тетрадей и беглой проверкой решений. Чтобы один человек справился с классом (10 команд по 2–3 человека), можно попросить ребят сдавать тетради на учительский стол, последовательно проверять их, писать в тетрадях «+5» или «−2» и не отвлекаться на запись результатов на доску, а лишь объявлять: «Миша, забирайте, не забудьте поставить себе две плюс пятерки и минус двойку!».

Важно правильно подобрать сложность заданий. Для подстраховки поставьте несколько заведомо легких задач (они не помешают, а дети порадуются!) и несколько заведомо сложных. Я обычно сложные и простые задачи ставлю вперемешку; и пусть уже в одной из первых задач содержится подвох, который наглядно покажет командам, как работают «минус двойки». В идеале каждая команда должна хоть где-то получить «−2», а то и «−4», но сумма баллов у каждой команды должна постепенно расти в течение игры.

Для неопытных и очень неуверенных в своих силах групп игра может пройти неудачно. Выставление минусов за неправильные ответы может демотивировать: вместо того, чтобы мобилизоваться и попытаться найти верный ответ, ребята могут говорить: «Да не очень-то и хотелось», «Ну и ладно, с этим номером не пошло» и даже «Ставьте “2”, я все равно не буду играть». В таких случаях, во-первых, можно использовать другие, «более добрые» игры, но я всегда рано или поздно возвращаюсь к «Плюс пять, минус два», делая задачи проще. Насколько проще? На столько, на сколько нужно!

В начале варианта необходимы задачи, посильные каждому школьнику. Это может быть легкий пример на вычисление, вопрос «Сколько дней длились каникулы, если первый день был 15 марта, а последний 21 марта», задачка на разрезание, просьба найти количество клеточек в прямоугольном треугольнике с катетами в одну и две клеточки. Увидев посильные задания и заметив, как одноклассники набирают баллы, многие ребята, настроившиеся саботировать игру, не выдерживают и сдают ответ, а получив «+5» — воодушевляются и читают следующие задачи. Теперь, когда они ошибутся, у них уже будет некоторый запас веры в себя, который позволит им попытаться сдать ответ повторно, проанализировав свою ошибку. Ура!

Можно вести счет не на доске, а в бумажных протоколах для каждой команды. В протоколе напротив номера каждой задачи есть место для записи ответов, а рядом — место для выставления баллов. Отсутствие видных всем результатов снижает азарт, но протоколы упрощают проверку ответов и фиксацию баллов.

Карта завоеваний

Карта завоеваний — более развлекательный формат того же жанра, о котором однажды рассказал преподаватель Малого мехмата МГУ Олег Юрьевич Ланин. Цель — за счет игровых атрибутов повысить мотивацию интенсивно работать в течение занятия и заодно повеселиться. Хорошо подходит для отработки стандартных упражнений, скучных самих по себе, в качестве развлечения под Новый год или в качестве спасительного средства для совсем слабо мотивированной группы. Олег Юрьевич также говорит, что ему нравится, что эта игра «несправедлива»: у более слабых учеников появляется шанс обыграть тех, кто обычно превосходит их на уроках.

Вместо таблицы результатов на доске рисуется контурная карта. За правильный ответ вместо баллов команда получает право занять одну из территорий, то есть закрасить ее своим цветом или изобразить на ней свой флаг. По мере решения задач можно занимать соседние территории, расширяя свое государство. За дополнительную плату возможны разные опции, вроде права «высадить десант», то есть завоевать территорию, не имеющую общей границы с вашим государством (за два правильных ответа), или завоевать территорию, принадлежащую другой команде (два правильных ответа).

Часто в этой игре участники сами предлагают новые правила, а при создании карты рисуют реки, мосты, порты и т.д. Я люблю назначать кого-то из участников ответственным за правила, и все вопросы по особенностям рельефа карты и правилам использования портов и вертолетов перенаправляю к нему.

Часто в этой игре запрещается сдавать ответ к одной задаче дважды. Однако мне больше нравится, когда есть возможность пересдать неправильный ответ. Но тогда нужно как-то учитывать номер удачной попытки; для этого можно ввести параметр «сила». В начале игры на доске указывается список всех команд, их флаги и начальная сила, скажем 20, одинаковая для всех. За каждый неверный ответ сила команды падает на 1, что немедленно отображается на доске. «Сила» играет роль лишь в одном случае: команда с меньшей силой не имеет права завоевать территорию команды с большей силой ни за какую цену. Из-за этого команда, окруженная со всех сторон, иногда не может никого завоевать, хотя имеет решенные задачи. «Силу», по моим правилам, нельзя повысить — можно лишь перестать ошибаться, копить правильные ответы и ждать, пока другие ошибутся, растеряют силу и станут уязвимы для атаки!

Можно ли? (+5, –6)

Игра по задачам с вопросами типа «Можно ли», «Существует ли», «Верно ли». Мотивирует дольше искать контрпример и не доверять своим мыслям вроде «Я уже почти все перебрал, значит, это невозможно» или «У меня уже три минуты не получается, значит, нельзя» и одновременно показывает важность доказательства невозможности, мотивирует придумывать доказательство, которое убедит самого участника и членов его команды. Доказательство в этой игре — не магический текст, который устроит учителя, а важный инструмент, дающий самим школьникам уверенность в некотором заранее неизвестном факте.

Игра не требует большого числа проводящих, достаточно 1 человека на 10–15 команд.

Нужно подобрать 10–20 задач указанного типа, не более трети из которых имеют ответ «Нет, нельзя» («Не существует», «Всегда верно»), который предполагает доказательство невозможности, несуществования и т.д., а оставшиеся примерно 70% имеют ответ типа «Да, можно» или «Нет, не всегда верно», который можно обосновать приведением примера (контрпримера).

Если команда находит пример (контрпример) к какой-то задаче, она в письменном виде показывает его жюри. За верный пример (удовлетворяющий условию) ставится «+5» баллов, за неверный — «–2», причем ошибку жюри указывать необязано, и уж тем более не сообщать, каков в задаче ответ (то есть существует ли пример).

Если команда считает, что в задаче контрпримера нет (то есть ответ «Нельзя», «Не существует» и т.д.), она имеет право просто сдать этот ответ, доказательство не проверяется. Если ответ окажется верным, команда получает +5 баллов, однако риск велик: за неверный ответ команда получает «–6»! Правда, она получает и огромную подсказку: в этой задаче есть пример, осталось его найти!

Разумеется, в этой игре нельзя вести детальный счет на доске: «минус шестерки» ясно покажут всем участникам, каков ответ в задаче. Поэтому делаем бумажный протокол для каждой команды и ведем счет на их столе. На доске можно выделить место для каждой команды и записывать туда баллы, не указывая, за какие они задачи.

Если хорошо подобрать задачи, игра начинается со шквала «минус шестерок» («Очевидно же, что это невозможно!»), но затем команды становятся более осторожными, стараясь не рисковать без оснований.

Придумывание задач

Игру «Плюс пять, минус два» можно проводить по задачам, предложенным детьми. Например, домашнее задание: каждой паре школьников придумать или выбрать в задачниках две задачи (можно — на определенную тему), решить их самостоятельно и сдать учителю условия. Учитель ксерокопирует или как-то по-другому размножает задания, в том числе свои две задачи. После этого все, включая учителя, решают задачи по правилам «Плюс пять, минус два», с единственным отличием — ответ сдается не учителю, а команде, предложившей задачу. За свои задачи все команды изначально получают в таблицу пятерки. Если в процессе игры выясняется, что у какой-то команды был к своей задаче неверный ответ, она получает за нее «–6».

Турнир по разрезалкам

Турнир по разрезалкам — другой, более простой формат придумывания задач. Цель — весело и творчески порешать задачи на разрезание и при этом освободить преподавателя от необходимости готовиться к занятию. Вот правила для участников.

Правила

В этой игре вы можете сделать ход двумя способами:

а) придумать и заявить разрезалку;

б) решить и сдать разрезалку, придуманную другими участниками.

Придумав разрезалку, нарисуйте в тетради условие и решение, покажите ведущему. Если разрезалка одобрена, начертите условие на доске. Другие команды смогут сдавать вам решения вашей разрезалки в течение 12 минут.

Как только ваша разрезалка появилась на доске, вам прибавляется число баллов, равное количеству участвующих команд.

Как только какая-то команда сдала вам решение вашей разрезалки, вы отдаете один свой балл этой команде.

Если вашу разрезалку не решила ни одна команда, то баллы, начисленные вам за эту разрезалку, обнуляются, а вы получаете право вывесить еще одну разрезалку (при условии, что до конца игры осталось достаточно времени).

За игру вы имеете право вывесить не более двух разрезалок, за исключением случая, описанного в предыдущем пункте.

Следите за правильностью начисления баллов и за сроком вывешивания разрезалок!

Организатору нужно написать на доске названия команд и выделить место для записи текущего числа баллов. Как только команда вывешивает разрезалку на доску, она пишет рядом с ней свое название, время вывешивания, в конце — время окончания приема решений по этой разрезалке. Затем учитель добавляет команде, вывесившей разрезалку, баллы в количестве участвующих команд. Как только одна команда сдает другой команде задачу, они должны сами или под вашим руководством увеличить число баллов у решившей команды на 1 и уменьшить число баллов у команды-автора на 1.

Может возникнуть необходимость объявить ограничения на сложность задач. Например, не более 40 клеточек. В любом случае перед вывешиванием разрезалка должна быть одобрена организатором. Будьте готовы мягко объяснить участнику, что его разрезалку вывешивать не стоит, а нужно сначала доработать. Нельзя вывешивать разрезалки, если до окончания игры осталось меньше времени, чем разрезалке положено висеть на доске.

Эта игра совершенно не подходит для серьезных соревнований и отлично проявляет себя в теплой атмосфере кружков для начинающих, когда дети с удовольствием делятся своим баллом с командой, решившей их задачу.

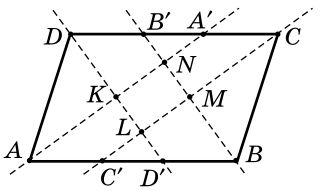
Найди замечательный факт

Игра для развития геометрической интуиции: она так же, как и «Можно ли? (+5; –6)», подчеркивает важность доказательства, не умаляя важности интуиции. Вместо условия задачи командам выдается геометрический чертеж. Нужно на нем заметить замечательные факты и записать их на доске. Можно доказывать и опровергать чужие факты, при этом командам начисляются баллы по определенным правилам.

Пример 1

Дано: AA', BB', CC', DD' — биссектрисы углов параллелограмма $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$.

Найти: замечательные факты.

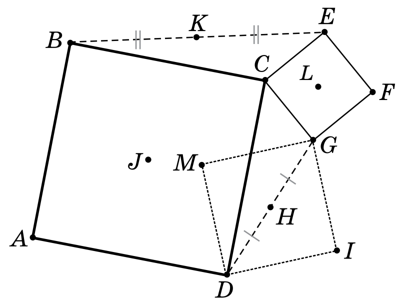


Ответ. Например, можно доказать, что AA' перпендикулярна BB'; $KLMN$ — прямоугольник, $AD' = b$, $KM = |a - b|$; KM делит AD пополам; KM, AC, BD, NL пересекаются в одной точке и т.д.

Пример 2

Дано: $ABCD$, $CEFG$, $GMDI$ — квадраты, J, H, L — их центры, K — середина BE.

Найти: замечательные факты.



Ответ. $KC = HG$; BG перпендикулярно DE; $KJHL$ — квадрат и т.д.

Правила

Вам выданы картинки, вы должны сами сформулировать геометрические теоремы и решить задачи, придуманные другими командами. Ваша первая задача — найти на картинке какой-нибудь замечательный факт, например, равенство каких-нибудь треугольников, или параллельность каких-нибудь прямых, или заметить, что какой-нибудь угол прямой, или какие-то три прямые проходят через одну точку и т.д.

Если вы нашли такой факт — напишите его на доске, вы сразу получите 10 баллов.

Если вы докажете чужой факт преподавателю — вы получите 3 балла, а у авторов факта будут вычтены 3 балла.

Если вы сможете рассказать преподавателю опровержение чужого факта, то все 10 баллов авторов этого факта будут переданы вам.

Можно проверить корректность — подойти к команде и попросить рассказать вам доказательство их факта. Если они вас убедят, то получат от вас 3 балла, а если они доказать собственное утверждение не смогут, то им придется отдать вам 3 балла.

Опровергнутый факт немедленно зачеркивается — любые действия с ним прекращаются. Проверка корректности по каждому факту возможна только одна, а ее результат (успешно или неуспешно) объявляется всем командам.

Важно сделать интересные картинки, насыщенные замечательными фактами, и поддерживать доброжелательную атмосферу. Главное — не баллы, а красота геометрии.

Баллы в приведенных выше правилах для участников рассчитаны на три команды. При большем числе команд за написание факта нужно давать больше баллов, например, $3n + 1$, где n — число команд, чтобы в случае доказательства факта всеми командами выставившая факт команда все же получала немного больше баллов, чем решившие команды.

Баллы рождаются только при появлении новых фактов, а во всех остальных случаях перетекают от команды к команде. Решения можно принимать как в устном, так и в письменном виде — по выбору организаторов. Проверку корректности и опровержение фактов представители двух команд могут провести без участия организаторов.

Основная проблема при выборе формата этой игры состоит в необходимости отделять очевидные факты вроде равенства вертикальных углов от фактов содержательных, пусть и простых. Необходимо поощрять поиск любых содержательных фактов. Часто оказывается, что из нескольких несложных наблюдений, выписанных на доску, позже удается вывести красивое и уже совсем неочевидное следствие. Однако нужно следить, чтобы процесс не превращался в бесконечное размножение однотипных или эквивалентных утверждений, формулируемых в погоне за баллами. Для решения этой проблемы мне известны два пути.

Первый путь, подходящий для небольшого дружного кружка, — обсуждать каждый написанный факт, и если все сходятся во мнении, что факт совершенно очевиден и не заслуживает вывешивания на доску, стирать его.

Второй путь — ограничивать количество фактов, которые команда имеет право вывесить на доску. Например, ограничиться тремя фактами на команду за игру. Тогда можно не следить за качеством фактов — команды будут сами стараться использовать свои три факта с максимальной эффективностью.

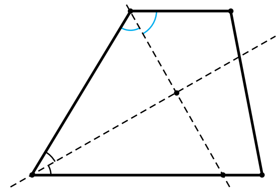
Картинка вместо условия

Можно использовать идею предыдущей игры и на обычном уроке. В замечательных книгах [9, 10] условия задач даны в виде картинок, без слов и часто без каких-либо подписей. Однако можно пойти еще дальше: не сообщать и никаким образом не выделять, что требуется найти или доказать.

Например, обсуждая свойства трапеции можно провести биссектрисы двух ее углов и спросить у класса, видит ли кто-нибудь что-то интересное на картинке? Можно ли сформулировать какую-нибудь теорему про биссектрисы трапеции?

Пример 1

Что интересного вы увидели на картинке? Можно ли сформулировать какую-нибудь теорему про биссектрисы трапеции?

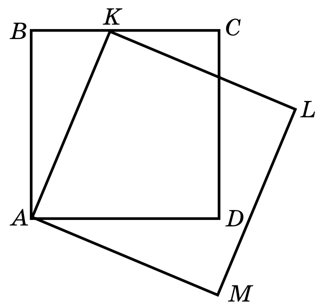


О таком опыте рассказала мне одна из участниц семинара учителей математики в МЦНМО. По ее словам, сначала ребята заметили, что биссектрисы перпендикулярны, доказали это, а потом смогли догадаться, что их точка пересечения лежит на средней линии. Доказали этот факт, используя свойство медианы прямоугольного треугольника, и в результате были горды и совершенно счастливы, что сами придумали целую теорему.

Вот задача-картинка, созданная по мотивам задач В.В. Произволова [11] и статьи Е.В.Бакаева и А.Д. Блинкова [12]:

Пример 2

Для двух квадратов на рисунке найдите три замечательных факта и докажите их.



Цель — не делать за школьников того, чего они могут достичь сами. Пусть берут дело в свои руки: формулируют задачу, вводят обозначения, находят факты и условия, при которых эти факты верны.

Если факты на картинке с двумя квадратами не находятся, можно дать подсказки.

Подсказки. На рисунке можно:

1) соединить две отмеченные точки отрезком, равным одному из уже проведенных;

2) найти три отмеченные точки, лежащие на одной прямой;

3) провести три прямые, пересекающиеся в одной точке;

4) провести два параллельных отрезка, соединяющих отмеченные точки.

Ответ к примеру 2. 1) $BK = DM$ и точки C, D, M лежат на одной прямой (следствие равенства треугольников ABK и ADM по первому признаку);

2) отрезки BD, KM, AL пересекаются в одной точке — центре большого квадрата (красивое доказательство получится, если построить третий квадрат $BC'D'A'$ так, что BC лежит на прямой BC', BA лежит на прямой BA', L принадлежит $C'D'$, M принадлежит $A'D'$);

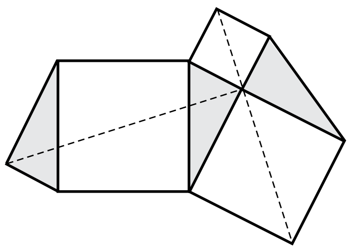
3) $CL \parallel BD$ (из вписанного четырехугольника $MKCL$). Более подробно об этой конструкции читайте в статье [12].

Картинка вместо подсказки

Иногда доказательство хочется не рассказать, а превратить в задачу. Тогда можно разбить большое доказательство на маленькие задачи или дать подсказки. В геометрии в качестве подсказки иногда достаточно дать чертеж к доказательству. Например, М.А. Волчкевич в задачнике [13] предлагает такую задачу.

Пример 1

Восстановите по чертежу Леонардо да Винчи данное им доказательство теоремы Пифагора.



Две другие задачи — на восстановление доказательства. Картинка слева взята из книги [14], а справа — из решения задачи [16] с сайта [15].

Ответ. Рисунок примера 2 иллюстрирует доказательство факта «*Сумма углов пятиконечной звезды равна* 180°». Доказательство использует проведение прямой, параллельной данной, теорему о внешнем угле треугольника и свойства углов при параллельных прямых и секущей.

Рисунок примера 3 иллюстрирует доказательство факта «*Центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах произвольного параллелограмма, сами являются вершинами квадрата*». Доказательство использует подсчет углов и признаки равенства треугольников. Картинка хорошо подсказывает, как доказать, что все стороны четырехугольника равны. Доказав это, очень легко остановиться и подумать, что дело сделано. Но так ли это? Если в четырехугольнике все стороны равны, то обязательно ли он квадрат? Необязательно? Нужно доказать еще, что углы прямые? Будет ли этого достаточно? А как доказать? Примерно такой диалог часто возникает со школьниками при обсуждении этой задачи. Подробности первого решения и второе решение см. на сайте [16].

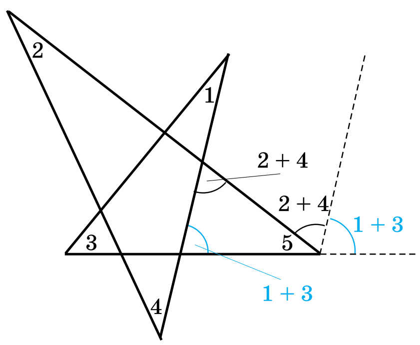
Часто задаваемые вопросы

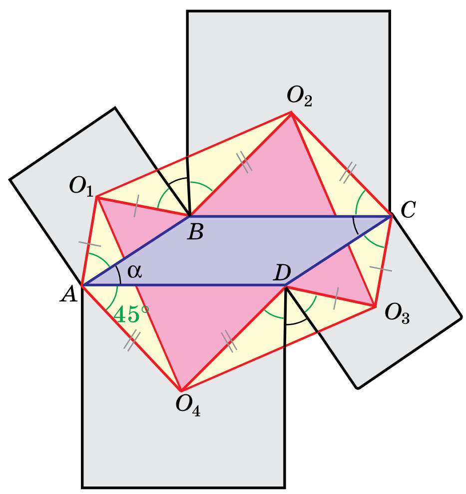
Как спасти ситуацию, если задания оказались слишком сложными? Можно провести «акцию» — объявить, что все желающие могут бесплатно получить подсказку по любой (одной) интересующей их задаче.

Как подводить итоги? На ваше усмотрение. Я обычно не акцентирую внимание на результатах игры. Подсчет баллов часто поручаю желающим участникам. Призы не выдаю. Стоит также помнить, что во всех играх велика роль случайности, а в некоторых, как в «Математическом аукционе», результаты вообще могут никак не коррелировать с числом и качеством решенных задач.

Пример 2

Чертежи иллюстрируют доказательства двух теорем. Попробуйте угадать формулировки этих теорем и восстановить их доказательства.





Ставить ли оценки по результатам игры? На ваше усмотрение. Можно и не ставить: результаты игры уже являются своего рода оценками. Можно поставить пятерки победителям. По результатам «+5, −2» я иногда ставлю оценки всему классу как за самостоятельную работу.

Задачи у всех одинаковые? Не будут ли команды списывать друг у друга? Задания во всех играх я делаю одинаковыми для всех. Списывание пресекается, штрафуется, презирается. Обсуждается его бессмысленность, ценность самостоятельной работы, обучения на своих ошибках. Поощряются самостоятельные продвижения, даже если они пока не велики. Это отдельная большая работа.

Как разбивать на команды? Можно по-разному: по желанию школьников, случайным образом (вытягиванием жребия) или по выбору учителя. В последнем случае нужно пытаться учесть совместимость школьников в разных смыслах этого слова. И либо поставить сильных вперемешку со слабыми, либо, наоборот, распределить учеников примерно по силе. В первом случае важно, чтобы не получилось, что сильный участник быстро все решает, пока слабые не успевают вникнуть. Должны быть задачи, посильные каждому школьнику, но требующие терпения и времени (например, «Найдите все способы разрезания данной фигуры на несколько равных частей»). Либо должны быть правила, вовлекающие в работу всех участников.

Как сделать, чтобы игра была интересна и самым сильным, и слабым? Одно из средств в этом направлении — разнообразие. Не упорядочивать задачи по сложности, чтобы в течение всего времени возникали и ситуации успеха, и трудности. Вставлять задачи на разные темы, иногда даже не совсем математические. Например, в «аукцион» я часто ставлю 1–2 задачи типа «Придумайте предложение из как можно большего числа букв, все гласные в котором различны».

Выдавать все задания сразу или постепенно? Можно выдать все задания в начале игры, но игра проходит более оживленно, если выдавать их постепенно. Например, так: каждая задача находится на отдельной карточке. В начале все команды получают первые две задачи. Сдав любой ответ (неважно, правильный или неправильный), команда берет листок с очередной задачей. Это бывает весело, но бывает и слишком утомительно — постоянное мельтешение мелко нарезанных бумажек. Компромисс — разделить задачи на несколько блоков и выдавать новый блок по мере необходимости, например, каждые полчаса.

Откуда брать задачи для игр? Этот вопрос мне задают, наверное, чаще всего. Обычно задачи к игре приходится подбирать для каждого класса заново, учитывая силу детей, пройденный материал и цели. Иногда удается с успехом «похитить» вариант игры с какого-либо турнира или кружка прошлых лет. Хочу отметить сайт с задачами по геометрии [15] со встроенным поиском по многим параметрам (в том числе по используемым фактам и методам) и две не слишком сложные игровые подборки задач с кружков Малого мехмата [17], [18].

Литература

1. *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994. **2.** Московские математические регаты. — Режим доступа: olympiads.mccme.ru/regata. **3.** Интернет-карусели ЦДО «Дистантное обучение». — Режим доступа: karusel.desc.ru. **4.** Турнир математических игр для 5 классов «Kostroma Open». — Режим доступа: kostroma-open.info/20181028.html. **5.** Турнир математических игр для 6–7 классов кружка «Совенок», Новосибирск. — Режим доступа: sites.google.com/site/sovenoknsk/meropriatia/turnirmatigr. **6.** Турниры математических игр в Казани. — Режим доступа: games-math.ru **7.** Южный математический турнир. — Режим доступа: adygmath.ru/tmg.html. **8.** *Пойа Дж.* Математическое открытие. — М.: Наука, 1976. **9.** *Акопян А.В.* Геометрия в картинках, 2011. — Режим доступа: mccme.ru/free-books/akopyan/Akopyan.pdf, второе издание, дополненное: 2018. **10.** *Балаян Э.Н.* Геометрия. Задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ. 7–9 классы. — М.: Феникс, 2013. **11.** *Произволов В.В.* Задачи на вырост. — М.: МИРОС, 1995. **12.** *Бакаев Е.В., Блинков А.Д.* Вспомогательные квадраты // Квант, 2016, № 4. **13.** *Волчкевич М.А.* Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы. — М.: МЦНМО, 2017. **14.** *Nelsen.* Proofs without words. — USA, 1993. **15.** ИПС Задачи по геометрии. — Режим доступа: zadachi.mccme.ru. **16.** ИПС «Задачи по геометрии». Задача № 1043 про квадраты на сторонах параллелограмма. — Режим доступа: zadachi.mccme.ru/2012/#&task1043. **17.** Занятие Малого мехмата 11 октября 2014 года для группы Б 6 класса. — Режим доступа: mmmf.msu.ru/archive/20142015/z6/B/03B.htm. **18.** Занятие Малого мехмата 13 декабря 2014 года для группы Б 6 класса. — Режим доступа: mmmf.msu.ru/archive/20142015/z6/B/12B.html. **19.** *Стрелкова Н.П.* Игры и другие нестандартные форматы на занятиях по геометрии. Семинар учителей математики в МЦНМО. Семьдесят девятое заседание. 25 октября 2018 года. — Режим доступа: mccme.ru/nir/seminar.

Т. АДРИАНОВА,
г. Москва

Статья опубликована: Архимед: научно-методический сборник. – М.: МАКС Пресс, 2019.
Фото: vk.com/albums-176747261

КОНКУРС ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ИГРАМ

Ежегодно, начиная с 1978 года, вот уже 30 лет проходит Турнир им. М.В. Ломоносова. В 1980 году на этом турнире впервые появился конкурс по математическим играм. Изначально он был устным. Позже во всех точках проведения турнира решения задач по математическим играм можно было сдавать в письменном виде, а в некоторых местах проведения турнира оставался еще и устный конкурс. Одним из таких мест многие годы была ФМШ № 2007.

На устном конкурсе школьники могут поиграть друг с другом или с жюри. Порой игра с жюри помогает придумать победную стратегию. И всегда особенно приятно выиграть у члена жюри.

Незадолго до проведения XLI Турнира им. М.В. Ломоносова организаторы сообщили, что в этот раз конкурса по математическим играм не будет, и предложили желающим устроить его самостоятельно.

В ФМШ № 2007 устный конкурс по математическим играм всегда пользовался большой популярностью. И в рамках проекта «Математическая вертикаль ФМШ № 2007» мы решили 30 сентября 2018 года на XLI Турнире им. М.В. Ломоносова провести такой конкурс среди школьников 5–7-х классов.

Идеи задач для него мы взяли из архива турнира за 2006, 2007, 2009 и 2010 годы (turlom.olimpiada.ru/old). Игры выбирались так, чтобы они были не только интересны, но и могли научить чему-то новому (например, поближе познакомить с симметрией, делимостью). Сначала было желание, как обычно, предложить три игры, но в итоге были выбраны четыре игры. В каждой игре по несколько пунктов, всего получилось 20 задач.

Чтобы при описании «перемены ролей» игроков школьникам было легче не путаться, кто теперь первый, а кто второй, мы дали всем игрокам имена. В каждой игре имя игрока, делающего первый ход, начиналось на «П», а имя его соперника — на «В».

Перед условиями задач было сказано: «Выберите игру, которая вас больше заинтересовала, и попробуйте придумать для одного из игроков стратегию, гарантирующую ему победу независимо от ходов соперника. Постарайтесь не только указать, как следует ходить, но и объяснить, почему при этом неизбежен выигрыш». В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешается, решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

Таким образом, школьники 5–6-х классов могли решать все 20 предложенных задач, а семиклассникам в зачет шли только 17 из них. И есть семиклассники, справившиеся со всеми задачами. Наилучшие результаты в 5-х и 6-х классах — 14 правильно решенных задач.

Все предложенные игры нашли свою аудиторию. При этом каждую задачу кто-нибудь решил. Самой популярной оказалась игра «Тир», хотя последние ее пункты и вызвали затруднения. Решить общий случай этой игры мы предложили семиклассникам. Но есть и шестиклассник, который с ним справился. Самой сложной, как и ожидалось, оказалась игра «Взаимно простые числа», потому мы и предложили ее для 6–7-х классов. Но и некоторые пятиклассники успешно с ней справились.

В конкурсе приняло участие около 300 школьников 5–7-х классов, распределение между классами — примерно поровну. В жюри были педагоги и выпускники ФМШ № 2007. По результатам конкурса более 50 школьников были награждены дипломами победителей и призеров.

Далее приводим условия и решения всех задач нашего конкурса. Условия задач местами отличаются от того, что было в архиве Турнира им. М.В. Ломоносова. Больше всего изменений — в игре «Тир», переделанной из игры «Скамейка» 2006 года. Все решения нами переработаны, потому есть немало отличий от найденного в архиве Турнира им. М.В. Ломоносова.

Задача 1. «Горошины». (*XXXII Турнир им. М.В. Ломоносова, 2009 г.*) Перед началом игры у Паши и Вити есть поровну горошин. Игроки ходят по очереди, первым ходит Паша. Ход состоит в передаче сопернику некоторого числа горошин. Нельзя передавать такое количество горошин, которое до этого уже кто-то в этой партии передавал. Ноль горошин тоже передавать нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода по этим правилам. Кто может победить в этой игре, как бы ни играл его соперник, если изначально:

а) (*5–6-й классы*) у каждого по две горошины;
б) (*5–6-й классы*) у каждого по три горошины;
в) (*5–7-й классы*) у каждого по 10 горошин;
г) (*5–7-й классы*) у каждого по N горошин?

Ответ: всегда побеждает второй игрок (Витя).

Решение. а) У каждого по две горошины. Первым ходом Паша может отдать Вите либо одну, либо две горошины. Если Паша отдаст две, Витя в ответ даст одну, и у Паши больше не будет ходов.

Если Паша отдаст одну, Витя в ответ даст ему две. Паше остается отдать три, на что Витя отдаст четыре, и Паша проиграет.

б) У каждого по три горошины. Первым ходом Паша может отдать Вите одну, две или три горошины. Если Паша отдаст две или три, в ответ получит одну, и у Паши больше не будет ходов.

Если же первым ходом Паша отдаст одну, Витя в ответ даст ему две. У Паши станет четыре горошины. Если Паша отдаст четыре, то в ответ получит три и проиграет. Если Паша отдаст три, то в ответ Витя отдаст четыре. У Паши станет пять горошин, он будет вынужден отдать все пять, в ответ получит шесть и проиграет.

в) У каждого по 10 горошин. Этот случай предложен, чтобы на большом числе горошин можно было почувствовать общую стратегию. Разбирать его нет смысла.

г) У каждого по N горошин. *Способ I.* Второй игрок всякий раз будет отдавать минимально возможное число горошин. Покажем, что у второго всегда будет ход.

Хотя начинает Паша, сделаем вид, что игру начал Витя, просто «первым ходом» он условно передал Паше ноль горошин. Теперь можно видеть, что всякий раз в ответ на ход Вити Паша будет вынужден отдать больше, чем сам получил. Поэтому количество горошин у Вити после каждой пары ходов будет увеличиваться хотя бы на одну. Перед Витиным ходом № K у него будет не менее $N + K$ горошин. А в соответствии со своей стратегией отдать во время хода № K Витя должен не более $2K$ горошин. Это осуществимо, ведь $N + K > 2K$ при $K \leq N$. А более чем N ходов игра длиться не может.

Способ II. У двоих игроков вместе $2N$ горошин. Разобьем числа от 1 до $2N$ на непересекающиеся пары: (1; 2), (3; 4), (5; 6) и так далее. Всякий раз, получив число из некоторой пары, Витя будет отдавать другое число из той же пары. Пары непересекающиеся, и за каждую пару ходов будет «вылетать» одна такая пара.

Помешать Вите отдать второе число из пары может только отсутствие у него нужного количества горошин. Докажем, что у Вити всегда будет ход.

Если Паша передал большее число $X + 1$ из некоторой пары $(X; X + 1)$, очевидно, что Витя всегда сможет отдать в ответ меньшее число X из этой пары. Горошин у него хватит, ведь он только что получил на одну горошину больше, чем должен отдать.

Пусть Паша передал меньшее число X из некоторой пары $(X;\ X + 1)$. Отдать в ответ $X + 1$ Витя не сможет только в одном случае — если до Пашиного хода у Вити ничего не было. Но за каждый парный ход у Вити количество горошин может уменьшиться максимум на одну, а было у него N, так что ноль у него может быть только после N парных ходов, то есть после окончания игры. Во время игры такой ситуации сложиться не может. Значит, Витя всегда ответит Паше и в конце концов победит.

Задача 2. «Тир». (*XXIX Турнир им. М.В. Ломоносова, 2006 г., «Скамейка».*) Есть мишень в виде полоски из N клеток. Ковбои Пол и Вилли по очереди стреляют без промаха в клетки мишени. Причем каждым выстрелом выбивают не только клетку, куда целились, но и клетки, касающиеся цели. Стрелять в уже выбитые клетки нельзя. Выигрывает тот, после чьего хода больше не остается клеток, доступных для выстрелов. Пол стреляет первым. Кто может победить в этой игре, как бы ни играл его противник, при:

а) (*5–7-й классы*) $N = 6$;

б) (*5–7-й классы*) $N = 7$;

в) (*5–7-й классы*) произвольном нечетном N?

г) (*5–7-й классы*) Кто выигрывает при игре по тем же правилам, если мишень имеет вид кольца из любого четного числа клеток. В центр стрелять нельзя.

д) (*5–7-й классы*) Кто выигрывает при игре по тем же правилам, если мишень имеет вид клетчатого прямоугольника размера $N \times M$, где N и M нечетны? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.

е) (*5–7-й классы*) $N = 8$;

ж) (*5–7-й классы*) $N = 12$?

з) (*7-й класс*) В какое минимальное и в какое максимальное число клеток могли стрелять ковбои к моменту окончания игры на полоске длины N?

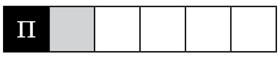
Ответ: а–в), д–ж) побеждает первый (Пол); г–е) побеждает второй (Вилли); з) минимум — $\left[\frac{N-1}{3}\right]+1$; максимум — $\left[\frac{N-1}{2}\right]+1$.

Решение.

Заметим, что при выстреле в некую клетку (на рисунке красим черным) становятся недоступными одна (если стреляли в клетку с краю) или две соседние клетки (красим серым). В случае, когда первым ходом стреляли в крайнюю клетку, игра продолжится как бы на полоске длины $N - 2$, причем игроки «поменяются ролями». В случае, когда первым ходом стреляли в клетку не с краю, перед ходом второго появляются две доступные «полоски» — справа и слева.

а) При $N = 6$ побеждает Пол. Если первым ходом он выстрелит в одну из средних клеток, то останется ровно два хода. Вилли начинает и проигрывает.

Если первым ходом Пол выстрелит в крайнюю клетку, то, куда бы ни пошел Вилли, он сможет сделать недоступными не более трех из четырех свободных клеток и проиграет:



Заметим, что Полу нельзя стрелять во вторую с краю клетку, иначе он проиграет:

б–в) При любом нечетном N победит Пол, если сделает первый выстрел в середину, а затем будет повторять ходы Вилли симметрично относительно середины полоски. Пока будет ход у Вилли, Пол тоже всегда сможет выстрелить. Рано или поздно Вилли будет некуда стрелять, и он проиграет.

Заметим, что при четных $N > 2$ Полу первым ходом никогда нельзя стрелять во вторую с краю клетку. Поскольку иначе таким ходом он оставит для Вилли полоску нечетной длины $N - 3$, Вилли станет первым в игре из пункта «в» и выиграет.

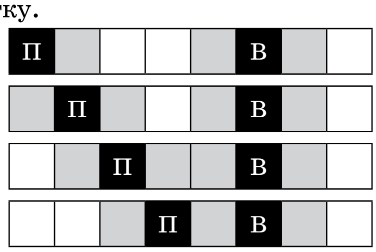
г) Очевидно, что если в кольце всего две клетки, своим ходом Пол выбивает обе клетки и побеждает. Покажем, что в остальных случаях колец с четным числом клеток победит Вилли. Итак, пусть «клеток» не меньше трех, а поскольку их число четно, то клеток не меньше четырех.

Способ I. Куда бы ни выстрелил Пол, после него «вырезаются» три недоступные клетки, и далее игра идет как бы на полоске длины $N - 3$, но Вилли «начинает». Поскольку N четно, то $(N - 3)$ — нечетно, значит, начинающий Вилли выиграет, играя аналогично Полу в пункте «в».

Способ II. Заметим, что независимо от формы клеток, можно считать, что есть симметрия относительно центра кольца (по количеству клеток). Вилли может стрелять симметрично Полу относительно центра и победить. Если клеток четыре или шесть, то после первых выстрелов Пола и Вилли игра закончится. Если же клеток не меньше восьми, то после первых выстрелов Пола и Вилли мишень разделится на две независимые части, и Вилли будет повторять ходы Пола в другой части. Пока есть ход у Пола, Вилли тоже сможет выстрелить.

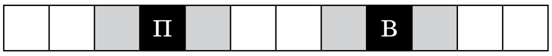
д) В клетчатом прямоугольнике размера $N \times M$, где N и M нечетны, победит Пол. Он должен выстрелить в центральную клетку, а затем повторять ходы Вилли симметрично относительно центра поля. Пока будет ход у Вилли, Пол тоже всегда сможет выстрелить. Рано или поздно Вилли будет некуда стрелять, и он проиграет. Заметим, что полоска длины N — это прямоугольник размера $N \times 1$.

е) При $N = 8$ победит Вилли. Без ограничения общности можно считать, что у Пола есть четыре различных варианта начать игру (относительно края мишени). На любой из них Вилли может всегда отвечать одинаково — в третью от другого края клетку.



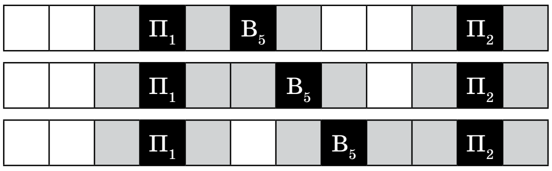
Видно, что в каждом из этих случаев после хода Вилли еще остается ровно два хода, Пол начинает и проигрывает.

ж) При $N = 12$ победит Пол. Первым ходом ему надо стрелять в четвертую с краю клетку. В ответ Вилли может выстрелить либо в кусочек из двух клеток, либо в кусочек из семи доступных клеток (по сути, там есть всего лишь четыре разных хода). Если первым своим ходом Вилли выстрелит в центральную клетку в куске из семи доступных, он разобьет оставшиеся доступные клетки на три одинаковые части:



В каждой из них еще можно выстрелить только в одну клетку. Значит, остается ровно три хода. Пол начинает и выигрывает.

На другие ходы Вилли в кусок из семи доступных клеток Пол может отвечать так:



В каждом из этих случаев после второго хода Пола еще остается ровно два хода. Вилли начинает и проигрывает.

Если первым своим ходом Вилли выбьет кусочек из двух клеток, Пол сможет разделить пополам оставшуюся полоску из семи клеток и выиграть:

з) Минимальное количество будет, если стрелять в клетки через две.

Тогда клеток будет отмечено:

$\frac{N}{3}$ при $N = 3k$; $\quad \frac{N-1}{3}+1$ при $N = 3k + 1$;

$\frac{N-2}{3}+1$ при $N = 3k + 2$.

Максимальное количество будет, если стрелять в клетки через одну. Тогда клеток будет отмечено $\frac{N}{2}$ при $N = 2k$; $\quad \frac{N-1}{2}$ при $N = 2k + 1$.

Короткие записи ответов можно дать с использованием понятия целой части числа:

$$\text{минимум} — \left[\frac{N-1}{3}\right]+1;\ \text{максимум} — \left[\frac{N-1}{2}\right]+1.$$

Задача 3. «Сколько морковок?» (*XXXIII Турнир им. М.В. Ломоносова, 2010 г., «Сколько конфет?»*) У Кролика есть несколько мешков с морковкой. Пятачок и Винни-Пух не знают, сколько в каком мешке морковок, а Кролик знает. Пятачок и Винни-Пух играют в игру, делая ходы по очереди. Ход состоит в том, что игрок указывает на какие-то два мешка, а Кролик вслух объявляет, сколько в этих мешках вместе морковок. Если после этого становится понятно, сколько морковок во всех мешках вместе, игрок называет это число и выигрывает. Иначе на этом его ход завершается, а право ходить получает противник. Дважды спрашивать про одну и ту же пару мешков нельзя. Начинает игру Пятачок. Кто может победить в этой игре, как бы ни играл его соперник, если у Кролика:

а) (*5–6-й классы*) четыре мешка с морковкой;

б) (*5–7-й классы*) три мешка с морковкой;

в) (*5–7-й классы*) пять мешков с морковкой;

г) (*5–7-й классы*) шесть мешков с морковкой?

Ответ: а), в) побеждает второй (Винни); б), г) побеждает первый (Пятачок).

Решение.

Комментарий. При совершенно честной игре в некоторых случаях может сложиться ситуация, когда количество морковок можно назвать раньше, чем в общем случае. Например, если, показав на два мешка, мы получаем ответ «10», то ничего о содержимом каждого мешка сказать нельзя, а если нам ответят «0», то можно. Причем эта проблема не решается, даже если договориться, что в мешках достаточно много морковок: если, например, их не менее пяти в мешке, то уже ответ «10» даст лишнюю информацию. Можно попытаться попросить школьников решать задачу, предполагая, что таких особых случаев не происходило, а самым дотошным предложить представить себе, что количество морковок может быть отрицательным (если такое допустить, проблема снимается).

а) Победит Винни. Количество морковок в мешках: A, B, C и D.

Пятачок первым ходом узнает $A + B$. Далее Винни узнает $C + D$ и немедленно побеждает, узнав $(A + B) + (C + D)$.

б) Победит Пятачок. Количество морковок в мешках: A, B и C. Пятачок первым ходом узнает $A + B$. Общую сумму он назвать пока не может. Винни своим ходом узнает, например, $B + C$. Поскольку он не может по этим данным отличить, например, ситуацию $A = 3$, $B = 4$, $C = 5$ с суммой 12 от $A = 2$, $B = 5$, $C = 4$ с суммой 11, он не станет называть общую сумму. Пятачок же, спросив $A + C$, вычислит:

$$A+B+C=\frac{(A+B)+(B+C)+(A+C)}{2},$$

и победит. Заметим, что он сможет назвать, очевидно, не только общую сумму, но и количество морковок в каждом мешке.

в) Победит Винни. Количество морковок в мешках: A, B, C, D и E. Пятачок первым ходом узнает

$A + B$. Далее Винни (а мы описываем выигрышную стратегию именно для него) узнает $C + D$. Если вторым своим ходом Пятачок спросит про пару мешков с участием E, например, узнает $E + A$, Винни тут же спросит про $E + B$. Поскольку уже известно $A + B$, $E + A$ и $E + B$, то Винни сможет вычислить

$$E = \frac{(E+A)+(E+B)-(A+B)}{2},$$

значит, узнает сумму всех $(A + B) + (C + D) + E$ и выиграет. Поэтому разумный Пятачок вторым своим ходом спросит про два мешка из разных названных ранее пар, например, узнает $B + C$, а Винни на это замкнет цепочку, спросив $A + D$. Как мы уже видели, Пятачок не может своим третьим вопросом задействовать мешок E, поэтому он спросит про $A + C$ (или про $B + D$). Теперь можно вычислить (согласно замечанию к пункту «б») количество морковок в каждом из первых четырех мешков. Назвав теперь один из них и E, Винни выиграет.

г) Победит Пятачок. Количество морковок в мешках: A, B, C, D, E и F. Пятачок первым ходом узнает $A + B$. Если Винни укажет на два других мешка, то Пятачок укажет на два оставшихся и сразу победит. Так что Винни остается спросить про $B + C$. Пятачок спрашивает про $A + C$, и теперь обоим известно, сколько морковок в каждом из первых трех мешков (см. «б»). Своим следующим ходом Винни может либо указать на один из новых мешков и один из первой тройки, либо на два новых. Но ни один ход не принесет ему победы: если он спросит, например, про $A + D$, Пятачок, зная A, вычислит D, потом спросит про $E + F$ и победит. Если же Винни спросит про $D + E$, то Пятачок спросит про $A + F$, найдет F и тоже победит.

Задача 4. «Взаимно простые числа». (*XXX Турнир им. М.В. Ломоносова, 2007 г.*) На листке бумаги написаны натуральные числа от 1 до N. Поля и Варя по очереди обводят в кружок одно число, соблюдая такое условие: любые два уже обведенных числа должны быть взаимно простыми, то есть должны не иметь общих натуральных делителей, кроме единицы. Два раза число обводить нельзя. Проигрывает тот, у кого нет хода. Поля ходит первой. Кто может победить в этой игре, как бы ни играла ее соперница, при:

а) (*6–7-й классы*) $N = 10$;
б) (*6–7-й классы*) $N = 12$;
в) (*6–7-й классы*) $N = 30$;
г) (*6–7-й классы*) $N = 15$?

Ответ: а–в) побеждает первая (Поля); г) Побеждает вторая (Варя).

Решение. Заметим, что число 1 может обвести любой игрок в любой момент. Если мы обводим число, имеющее простые делители p_1, p_2, ..., p_k, то больше ни одно число, делящееся на хотя бы одно из этих простых чисел, обводить нельзя. Фактически игру можно понимать так: выписаны все простые числа, не превосходящие N, и число 1, и можно «брать» одно или несколько таких чисел. Так, обводя 3, мы «берем» простое число 3, обводя 9, тоже «берем» 3, а обводя 12, берем 2 и 3 одновременно.

а) Побеждает Поля.

Список чисел: 1, 2, 3, 5, 7 (всего 5). Чисел нечетное количество, но нельзя позволить второй взять два числа сразу (2 и 3, обведя 6, или 2 и 5, обведя 10). Поэтому первым ходом Поля берет 2 (обводит 2, 4 или 8). Дальше числа можно брать только по одному, их осталось четное количество, и начинает Варя. Поля побеждает.

б) Побеждает Поля. Список чисел: 1, 2, 3, 5, 7, 11 (всего 6). Хотя чисел четное количество, обведя 6 первым ходом, Поля берет сразу два числа — 2 и 3. Дальше числа можно брать только по одному, их осталось четное количество, и начинает Варя. Поля побеждает.

в) Побеждает Поля.Список чисел: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 (всего 11). Обводя 30 первым ходом, Поля берет сразу три числа: 2, 3 и 5. Дальше числа можно брать только по одному, а их осталось четное количество. Начинает Варя, и Поля побеждает.

г) Побеждает Варя. Список чисел: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 (всего 7). По четности ходов, казалось бы, побеждает первая, но тут все непросто. Видно, что взять за один ход три числа невозможно. Значит, Поля возьмет одно или два числа. Покажем, что Варя всегда сможет ответить ей так, чтобы после их пары ходов осталось четыре числа, которые далее можно будет брать только по одному. Есть 4 варианта взять два числа сразу (можно брать 2 и 3, обводя 6, можно брать 2 и 5, обводя 10, брать 2 и 7, обводя 14, и брать 3 и 5, обводя 15). Заметим, что число 7 участвует только в одной паре.

Покажем в таблице, как Варя будет отвечать на первый ход Поли.

1	П										
2	В	П	В	В	В	В	В	П	В	П	П
3	В	В	П	В	В	В	В	П	П	В	В
5		В	В	П				В	П	П	
7					П						П
11						П					
13							П				

Итак, Варя всегда может после своего хода оставить четное количество чисел, которые можно брать только по одному. Далее начинать будет Поля, значит, последний ход будет у Вари, и она победит.

Г. ЛЕВИТАС,
gglevitas@gmail.com,
г. Москва

ГРЯДУЩАЯ РОБОТИЗАЦИЯ И ШКОЛА БУДУЩЕГО

Я не знаю, как будущее общество будет строить систему образования. Но я хочу понять, что делать, когда настанет роботизация. Уже сейчас в США имеют место случаи поголовного увольнения всех рабочих больших заводов (остается только несколько человек для общего наблюдения за работающими роботами). В обозримом будущем останутся только писатели, художники, музыканты, архитекторы, словом, люди творческих профессий, которые нужны лишь в случае их особой талантливости. Возникает вопрос о том, какие массовые профессии останутся людям, а не роботам. Конечно, роботы смогут обеспечить людей всем необходимым, но что будут делать эти обеспеченные всем люди? Появилась даже такая шутка: «Труд превратил обезьяну в человека; отсутствие труда совершит обратное превращение».

Я нашел только три профессии (массовые профессии!), в которых человек незаменим. Это профессии типа «человек-человек». Это юристы, врачи и педагоги. Возможно, есть и еще какие-нибудь, но я их не вижу. Зато вижу возможность резко увеличить число педагогов. И думаю: а нужно ли их так много? И понимаю: очень нужно.

Спросим себя: можно ли хорошо учить в классе, в котором 20–30 человек? Говорят, можно. И ссылаются на опыт блестящих педагогов. И я говорю: можно, если учит блестящий педагог. А если обычный средний учитель, то нельзя. Правда, существуют технологии, позволяющие резко повысить эффективность обучения при классно-урочной системе. Но все-таки и эти технологии решают не все возникающие проблемы. Во-первых, они применимы только к той части школьной программы, которая дает точные знания, а не, скажем, к изучению художественной литературы. А во-вторых, далеко не всегда они позволяют заинтересовать изучаемыми предметами буквально всех учеников. Да, все заняты делом. Но зачастую формально, и результат у многих оказывается троечным.

Есть ведь аксиома:

Хорошее обучение невозможно без заинтересованности ученика.

Но этой аксиомой пользуются очень редко. Широко обсуждается совсем другое: как проконтролировать получаемые знания, как заставить детей учиться из-за боязни этого контроля. И происходит перевод тонкой работы по формированию личности в борьбу за баллы, очки, рейтинг. Говорил ведь Жорес Алферов: «Капитализм страшен для дела образования, потому что все мерит числами — деньгами».

Правы те, кто говорит, что классно-урочная система должна уступить место такой системе обучения, при которой ученик получает знания не в большом коллективе, руководимом одним человеком, а в обстановке, когда его, ученика, продвижения немедленно улавливаются и учитываются педагогом. Но как это сделать?

Предлагаемые ныне варианты (С.А. Бебчук, А.Н. Тубельский, М.П. Щетинин и др.) всегда основываются на создании блестящих коллективов учителей. В них остаются те же массы учащихся при немногих учителях, но эти последние умеют так организовать обучение, что успевают наблюдать за ростом детей, благо и педагогических способностей у этих учителей достаточно. Поэтому такие школы не служат моделями массовой школы будущего.

Решение заключается в том, чтобы резко увеличить число учителей. Чтобы в классе на занятии у одного учителя было два-три ученика. Только тогда можно будет всерьез говорить об умственном развитии всех детей — завтрашнего человечества.

Грядущая роботизация как раз и создает эту возможность — увеличить в десятки раз число учителей, и нам нужно хорошо подготовиться к тому моменту, когда у общества обнаружится явный избыток рабочей силы. *Вот на какую профессию надо будет переучивать большую часть населения — на профессию педагога.*

Так и вижу школу будущего. Небольшие классы, в которых собраны все необходимые средства обучения, и занимаются в них по три-четыре человека: учитель и ученики. Дети овладевают знаниями, причем по каждому предмету можно в школе усваивать либо только базовые знания, либо профильные. Профильные — это и есть российская школьная программа. Она ведь создавалась для всех, в том числе и для тех, кто собирался в любой из вузов! А что такое базовые знания по каждому из школьных предметов — это надо еще понять. Учителя в этой школе хорошо владеют предметом: они в педагогическом учебном заведении занимались не последними достижениями их науки, а внимательно изучали школьные учебники. Они могут определить, какой уровень по их предмету (базовый или профильный) рекомендовать какому ученику, как подобрать работоспособную пару или тройку учеников. Они хорошо знакомы с последними достижениями педагогической психологии. Они имеют небольшую нагрузку, позволяющую им тщательно готовиться к урокам, посещать уроки коллег, постоянно повышать свой культурный уровень. Они получают большую зарплату, так что их профессия очень привлекательна для населения. Дети и их родители могут выбирать школу и определять уровень подготовки по каждому предмету. Уровень обучения очень высок. Считается, что переводные тройки следует пересдавать, котируются только хорошие и отличные оценки. Контролировать полученные знания могут и роботы, но допуск к этому контролю, к этим роботам, осуществляет только учитель-человек.

Для достижения такого положения с образованием требуется радикальное изменение отношения к нему со стороны государства и всего общества. Но многое тут зависит и от нас, работающих в этой системе. Мы должны заранее подготовить обоснованные предложения по целому ряду вопросов. Вот некоторые из них.

1. Концепция модели школы будущего.
2. Разработка необходимых уровней обучения по каждому учебному предмету школы будущего.
3. Определение необходимых требований к учителю по каждому предмету и каждому уровню этого предмета.
4. Определение программ обучения будущих учителей, начинающийся предметом «Основы педагогики» для старших классов общеобразовательной школы.
5. Разработка учебных программ по специальностям для педагогических колледжей и вузов.
6. Организация необходимой экспериментальной проверки всего наработанного по предыдущим пунктам.

Считаю назревшей необходимостью создание в рамках РАО научно-исследовательского подразделения «Школа будущего». Готов участвовать в его работе в качестве научного сотрудника.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам. Требования к оформлению статьи:

- Материал должен быть напечатан на компьютере.
- Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.
- Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.
- Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

Л. ЧУГУНОВА,
с. Малая Малышевка,
Самарская обл.

ПАТРИОТИЧЕСКОЕ ВОСПИТАНИЕ В РАБОТЕ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Как нет человека без самолюбия, так нет человека без любви к отечеству, и эта любовь дает воспитанию верный ключ к сердцу человека...
К.Д. Ушинский

А.Н. Колмогоров

А.Н. Крылóв

Патриотическое чувство не возникает само по себе — его надо воспитывать в ребенке. Поэтому большую работу по воспитанию у учащихся патриотических чувств необходимо вести не только классному руководителю, но и учителю независимо от преподаваемого предмета.

В подростковом возрасте актуальной становится популяризация достижений российской науки, промышленности, культуры и созидательного труда, введение в образовательный процесс профессионально-ориентирующих мероприятий, направленных на сохранение памяти об истории народа, его традициях, боевых и трудовых подвигах, на повышение уровня знаний российской литературы, культуры, географии, краеведческих знаний, понимания современных процессов в России в целом и в регионе проживания.

Математика — это абстрактный предмет, и поэтому может сложиться впечатление, что он очень неудобен для воспитания вообще, тем более для патриотического воспитания. Однако считаю, что математическое образование в школе нельзя сводить только к передаче учащимся определенной суммы знаний и навыков. Перед учителем математики стоит и другая, не менее важная задача — реализация возможностей своего предмета в развитии личности учащихся. При обучении математике основными формами, способствующими патриотическому воспитанию обучающихся, являются:

– использование историко-математического материала;
– проведение тематических уроков;
– решение математических задач прикладного характера и идейной направленности;
– внеклассная работа.

Говоря о патриотическом воспитании подрастающего поколения, необходимо особо подчеркнуть, что, пока не поздно, за молодежь надо бороться, не жалея средств. То, что мы вложим в наших ребят сегодня, завтра даст соответствующие результаты. Воспитаем патриотов, деловых и здоровых людей, значит, можно быть уверенным в развитии и становлении стабильного общества.

Воспитывать патриотов нужно на каждом уроке.

Задачи с патриотическим содержанием

В обучении математике с точки зрения патриотического воспитания огромную роль играет подбор математических задач для уроков с учетом дидактических и методических требований. Решение задач, включающих исторические сведения, способствует развитию кругозора учащихся и познавательного интереса к предмету. И урок математики становится для них не просто уроком, на котором нужно решать, вычислять и заучивать формулы, а пробуждает чувства сопричастности к величию своей страны, собственных предков. Решение задач с практическим содержанием дает возможность учащимся задуматься и о тяготах военных лет. Составлять такие задачи к уроку не так и сложно. Главное, выбрать тот материал, который оставит яркое впечатление в душе ребенка. Можно посвятить целый урок определенной теме, а можно использовать только одно задание, после решения которого сообщить интересную информацию или даже прочитать стихотворение.

Приведу примеры некоторых патриотических задач, используемых на уроках.

Задача 1. Конструкторы в годы войны создали немало первоклассной техники, например, истребитель «ЯК-3» (конструктор — А. Яковлев). Максимальная скорость «ЯК-3» 720 км/ч, а немецкого истребителя «Мессершмитт Bf.109» на 120 км/ч меньше и на 30 км/ч больше скорости другого немецкого истребителя — «Фокке-Вульф FW-190». Найдите скорости немецких истребителей и сравните их со скоростью «ЯК-3».

Задача 2. Постройте столбчатую диаграмму по данным о соотношении вооруженных сил СССР и Германии накануне Великой Отечественной войны.

Вооруженные силы	СССР	Германия
Личный состав	1 200 000	1 800 000
Количество танков	990	1 700
Количество орудий	7 600	14 000
Количество самолетов	667	1 390

Задача 3. В таблице указаны соотношения сил сторон к началу контрнаступления Красной Армии под Москвой в 1941 году. Сопоставьте численность войск и вооружения СССР и Германии под Москвой.

Страна	Численность войск, чел.	Численность вооружения, шт.		
		орудия и минометы	танки	самолеты
СССР	1 100 000	7 652	774	1000
Германия	1 708 000	13 500	1170	615

Задача 4. Во время Великой Отечественной войны погибло около 20 млн советских граждан. Это составляет 40% от общего количества погибших во время Второй мировой войны. Сколько человек погибло во Второй мировой войне?

Задача 5. Наиболее трудный и трагический период в жизни Ленинграда в годы Великой Отечественной войны продолжался с 8 сентября 1941 года по 27 января 1944 года, когда город был блокирован врагом. Сколько дней и часов продолжалась блокада Ленинграда?

Задача 6. С самолета, находящегося на высоте более 320 м, для партизан был сброшен груз. За какое время груз долетит до земли? (Ускорение свободного падения 10 м/с^2.) На каком расстоянии от деревни, занятой фашистами, должны находиться партизаны, чтобы забрать груз, если средняя скорость передвижения по лесу 5,4 км/ч и фашисты увидели самолет за 10 минут до сброса груза?

Задача 7. При испытании двух двигателей было установлено, что расход бензина при работе первого двигателя составил 450 г, а при работе второго двигателя 288 г, причем второй двигатель работал на три часа меньше и расходовал бензина в час на 6 г меньше. Сколько граммов бензина расходует в час каждый двигатель?

Эпиграф к уроку

Еще одним из направлений воспитательной деятельности учителя может стать использование эпиграфов к урокам. Эпиграфом могут стать строчки стихотворений, высказывания и афоризмы известных людей не только о математике и математиках, но и патриотического содержания.

«Человек есть дробь. Числитель это — сравнительно с другими — достоинства человека; знаменатель — это оценка человеком самого себя. Увеличить своего числителя — свои достоинства — не во власти человека, но всякий может уменьшить своего знаменателя — свое мнение о самом себе и этим уменьшением приблизиться к совершенству» *(Л.Н. Толстой)*.

«Арифметика и геометрия нужны каждому воину» *(Платон)*.

Эпиграф можно записать на доске или прочитать его в начале урока. Записывать высказывания в тетради учащимся не нужно, но найдутся те, кто обязательно это сделает или хотя бы задумается над их смыслом.

Краеведение

Одним из ведущих направлений формирования патриотического сознания детей является краеведение. Школьное краеведение помогает воспитывать у учащихся бережное отношение к природным богатствам, уважение к труду и традициям народа, любовь к своей Родине. Знакомство со знаменитыми земляками воспитывает гордость за родной край.

Как можно использовать краеведческий материал на уроках математики? Ведь на первый взгляд у математики и краеведения нет ничего общего.

Никто не возьмется перечислить всего, что стоит за большим и емким словом «Родина». Это слово с детства знает каждый. Родина — это место, где ты родился, где живешь со своими родителями, со своими друзьями. В большой стране у каждого человека есть свой маленький уголок — деревня или город, улица, дом, где он родился. Это его малая родина, а из множества таких маленьких уголков и состоит наша великая Родина. Родина начинается на пороге твоего дома. Мы любим нашу Родину. А любить Родину — значит жить с ней одной жизнью. Как относится народ к своему Отечеству, видно из такого жанра, как устное народное творчество.

Задание. Проведите вычисления, записывая ответы в представленном порядке, и с помощью ключа прочитайте пословицу:

	0,71 + 0,8;	→	2,3 + 2,2; →
→	5,4 + 1,3;	→	0,32 + 0,47; →
→	1,8 + 0,1;	→	17,02 + 3,56; →
→	12 + 1,2;	→	3,09 + 2,21; →
→	22,98 – 2,4;	→	5,35 – 3; →
→	3,78 – 1,78;	→	1 – 0,3; →
→	8 – 2,7;	→	3,5 – 1,7; →
→	9,863 – 0;	→	18,62 – 18,62; →
→	6,86 • 3;	→	1,9 • 1; →
→	0,3 • 6;	→	0,18 • 10; →
→	0,52 • 100;	→	5 • 0,9; 60 • 0,4;
→	4,7 : 2;	→	18 : 4; →
→	12,3 : 3;	→	9,4 : 4; → 1,4 : 0, 7.

Ключ:

0,7	1,8	5,3	2	2,35	13,2	134,31	20,58	0,79	1,9
у	е	м	ь	т	–	м	а	и	н
24	4,1	52	9,863	0	6,7	4,5	1,51	20,58	
с	я	п	й	з	д	о	р	а	

Ответ: Родина — мать, умей за нее постоять.

Аналогичным образом, различными заданиями для устной работы или проверочной работы, можно закодировать следующие пословицы.

Если дружба велика — будет Родина крепка.

Жить — Родине служить.

Береги землю родимую, как мать любимую.

Кто Родину любит, тому она в долгу не будет.

Былой славой боя не выиграешь.

Если народ един, он непобедим.

Если по-русски скроен, и один в поле воин.

Каков полк, таков о нем и толк.

Очень хорошо проходит дидактическая игра — математическое лото. После выполнения заданий можно провести небольшую беседу на патриотическую тему.

Рассказы о применении математики и выдающихся математиках

Каждому учителю известно, что обучение должно быть эмоциональным и возбуждать положительные эмоции. Как показывает практика, на уроке создается благоприятная эмоциональная обстановка, если перед изложением нового материала провести беседу о значении математики в жизни. Можно, например, рассказать о роли ученых-математиков в укреплении оборонной мощи нашей страны в годы Великой Отечественной войны. В этот период их научные исследования были направлены на решение проблемы обороны страны.

Так, в 8-м классе при прохождении темы «Таблица квадратов и квадратных корней» можно рассказать о штурманских таблицах, разработанных сотрудниками математического института Академии наук СССР и широко применявшихся во время войны в авиации дальнего действия. Ни в одной стране не было штурманских таблиц, равных этим по своей простоте и оригинальности.

Здесь же можно рассказать о таблицах для определения местонахождения судна по радиопеленгам, подготовленных коллективом математиков под руководством академика С.Н. Бернштейна, и о Большом астрономическом ежегоднике на 1943–1945 годы, созданном учеными Ленинграда в суровых условиях блокады и имевшем очень важное значение для авиации, флота и артиллерии.

В последнее время большое внимание уделяют изучению учащимися элементов теории вероятностей. В связи с этим можно и нужно рассказать учащимся о том, что работы академика А.Н. Колмогорова и его учеников в области теории вероятностей использовались во время войны для нахождения самолетов и подводных лодок противника. Исследования А.Н. Колмогорова в области теории стрельбы помогли увеличить эффективность огня артиллерии.

В целях военно-патриотического воспитания учащихся можно рассказать о работах по укреплению военно-морского флота выдающегося советского математика и педагога академика А.Н. Крылова. Его труды по теории непотопляемости и качки корабля широко использовались нашими военно-морскими силами во время войны. Об этом я упоминаю при изучении темы «Приближенное значение числа» в 5-м классе или темы «Приближенные вычисления» в 8-м классе.

Также рассказываю учащимся о роли ученых-математиков М.В. Остроградского и П.Л. Чебышева в развитии военной техники.

Мы, учителя математики, можем оказать немалую услугу будущим воинам, рассказав им о применении математики на военной службе. Ученики должны знать, что твердое знание предмета необходимо для овладения основами военной техники, военного искусства, многими профессиями, нужными в армии.

Воспитать патриота своей Родины — ответственная и сложная задача. Планомерная, систематическая работа, использование разнообразных средств воспитания, общие усилия школы и семьи, ответственность взрослых за свои слова и поступки могут дать положительные результаты и стать основой для дальнейшей работы по патриотическому воспитанию. Однако не следует ждать от детей «взрослых форм» проявления любви к Родине. Но если в результате педагогической работы ребенок будет располагать знаниями о названии страны, ее географии, природе, символике, если ему известны имена кого-то из тех, кто прославил нашу родину, если он будет проявлять интерес к приобретаемым знаниям, то можно считать, что задача выполнена в пределах, доступных школьному возрасту.

Конечно, на одном уроке невозможно целиком охватить всю историю и традиции. Но рассказать о наиболее ценных, ярких и заметных во всем мире явлениях и событиях, признанных типичными только для нашей страны, можно и должно. Воспитательная работа на уроках и во внеурочное время даст заметные результаты, если она будет частью всей работы школы по патриотическому воспитанию детей, если она по содержанию и по методам реализации будет усложняться от класса к классу.

Тема урока: «Проценты». 5 класс

Учебник: Зубарева И.И., Мордкович А.Г. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений, — 14-е изд., испр. и доп. — М.: Мнемозина, 2013.

Тип урока: урок систематизации знаний и умений, урок-практикум.

Цель: совершенствование практических навыков решения основных задач на проценты и умения применять их при решении реальных жизненных задач.

Задачи:

образовательные: обеспечить осознанное усвоение процентов при решении задач; закрепить навыки и умения применять алгоритмы при решении задач на проценты; создать условия для систематизации, обобщения и углубления знаний учащихся при решении задач по теме «Проценты»;

воспитательные: формировать внимательность и аккуратность в вычислениях; воспитывать чувство взаимопомощи, уважительное отношение к чужому мнению, культуру учебного труда, требовательное отношение к себе и своей работе; воспитывать патриотические чувства на примере героического прошлого города Ленинграда;

развивающие: способствовать развитию творческой активности учащихся; повышать познавательный интерес к предмету; развивать критическое мышление (навыки сопоставления, формулирования и проверки гипотез, правил решения задач, умений анализировать способы решения задач), способность рассуждать.

Формы работы: фронтальная, парная, индивидуальная.

Оборудование: доска, экран, проектор, компьютер, компьютеры для учащихся, листы самооценки.

ХОД УРОКА

Организационный этап

Математика, друзья,
Абсолютно всем нужна.
На уроке работай старательно,
И успех тебя ждет обязательно!

Учитель. У каждого из вас на столах лежат листы самооценки. Подпишите их. В течение урока мы с вами будем выполнять различные задания. По окончании решения каждой задачи вы должны сами оценить свою работу.

Лист самооценки

ФИ ______________________ класс ____________							
	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Тест	Отметка
Баллы							
2 балла — справился с задачей без затруднений; 1 балл — справился с задачей, но возникали сложности; 0 баллов — не справился с задачей.							

Актуализация знаний

1. На доске записаны математические символы: «+», «–», «·», «:», «%». Какой из них лишний и почему?

2. Закончите предложения.

а) Чтобы проценты записать в виде десятичной дроби, нужно...

б) Чтобы десятичную дробь выразить в процентах, нужно...

3. (*Устно.*) а) Выразите десятичную дробь в процентах:

0,132; 1,087; 0,3; 0,56; 0,009.

б) Запишите проценты в виде десятичной дроби:

3%; 26%; 80%; 67%; 105%.

4. Найдите 50% от 60.

5. Найдите число, 12% которого равны 24.

6. Сколько процентов составляет число 15 от числа 60?

Постановка цели и задач урока

Задача 1. Во время Второй мировой войны погибло примерно 50 млн человек, из них 40% — советские граждане. Сколько советских граждан погибло во Второй мировой войне?

Ответ: 20 млн человек.

Один ученик работает у доски.

Учитель. 20 млн человек — это огромная потеря для нашей страны. Проходят годы, но эта война останется в истории и памяти народа навсегда. Сегодняшний урок мы посвятим одному из эпизодов Великой Отечественной войны — блокаде Ленинграда.

Ленинград — город-герой, современное его название — Санкт-Петербург. События, происходившие в городе во время войны, никого не могут оставить равнодушным. Давайте вспомним те страшные дни.

Демонстрация фильма «Дорога жизни».

Учитель. Посмотрим на блокаду с точки зрения математики и для этого применим знания по теме «Проценты». Мы уже многое знаем о процентах и сможем решить задачи.

Применение знаний и умений в новой ситуации

Учитель. Итак, приступаем к решению задач, которые помогут нам осознать всю тяжесть жизни ленинградцев во время блокады города.

Задача 2. В условиях блокады самым сложным оказалось снабжение населения и войск самым необходимым — водой и едой. Запасы продовольствия в городе с каждым днем сокращались. Постепенно уменьшались и нормы выдачи продуктов. Во время блокады Ленинграда всем жителям города по карточкам полагался хлебный паек, то есть определенная норма хлеба в сутки. В декабре 1941 года он составлял: 500 г хлеба рабочим, 400 г служащим, 300 г иждивенцам. Зимой 1943 года рабочие получали лишь по 25% от буханки хлеба, масса которой 1 кг, а служащие и дети — 12,5%. Сколько граммов хлеба получали рабочие, служащие и дети?

[250 г, 125 г]

Учитель. 125 граммов хлеба ленинградцы с любовью и нежностью называли «восьмушкой».

Задача 3. Героизм школьников Ленинграда состоит в том, что они посещали школу. Зимой 1942–1943 гг. работали 84 из 401 школы, среди обучающихся старшеклассников было 725 человек. Вычислите, сколько процентов от общего числа школ составляли работающие в блокадном Ленинграде школы. Сколько учеников, несмотря на голод и холод, занималось в школах, если старшеклассники составляли примерно 2,7%? Ответ округлите до целых.

[21%, 26 852 ученика.]

Задача 4. Движение автомашин с грузом в 1941 году началось по Ладожскому озеру только тогда, когда это позволила толщина льда. Средняя глубина Ладожского озера 51 м. Найдите допустимую для движения машин с грузом толщину льда, если известно, что она должна составлять 0,4% от средней глубины озера.

[20,4 см]

Задача 5. (*Самостоятельно.*) Состав хлеба на 20 октября 1941 года: ржаная мука — 63%, солодовая мука — 12%, овсяная мука — 8%, мука из отрубей — 8%, соевая мука — 4%, мука из затхлого зерна — 5%. Сколько граммов муки каждого наименования входило в состав хлеба, если масса буханки хлеба 1 кг?

Два ученика работают с обратной стороны доски.

Физкультминутка

Пусть всегда будет солнце!
(руки вверх над головой)
Пусть всегда будет небо! (руки в стороны)
Пусть всегда будет море!
(руки перед собой)
Пусть всегда буду я!
(подняться на носочки)
Пусть всегда поют песни!
(наклоны в стороны)
Пусть всегда будут танцы!
(приседания)
Пусть всегда будут птицы!
(наклоны, отводя руки назад)
Пусть всегда будет мир!
(хлопки над головой)

Тест

Учащиеся выполняют тест самостоятельная за компьютерами.

1. Из общего числа врачей, которых в действующей армии во время Великой Отечественной войны насчитывалось около 700 000 человек, женщин было 42%. Сколько женщин было среди врачей действующей армии во время войны?

1) 294 2) 6000
3) 294 000 4) 60 000

2. За время Великой Отечественной войны погибло 22 миллиона солдат; эта цифра составляет 12% довоенного населения нашей страны. Вычислите население страны на начало 1941 года. Ответ дайте в млн человек и округлите до целых.

1) 184 млн 2) 183 млн
3) 180 млн 4) 185 млн

3. Из 1418 дней существования советско-германского фронта активные боевые действия сторон велись в течение 1320 дней. Вычислите в процентах продолжительность активных боевых действий. Ответ округлите до целых.

1) 93 2) 10 3) 94 4) 9

4. Личный состав эскадрильи «Нормандия – Неман» включал французских добровольцев (14 летчиков и 58 авиамехаников) и 17 советских авиамехаников. Сколько процентов от личного состава эскадрильи составляли французские добровольцы? Ответ округлите до целых.

1) 80 2) 79 3) 81 4) 8

5. С 26 сентября по 5 декабря 1941 года Красная Армия вела тяжелые кровопролитные бои под Москвой. Формировались дивизии народного ополчения, город готовился к уличным боям. На строительство оборонительных сооружений, в частности, на рытье окопов, было мобилизовано 450 000 жителей столицы, 337 500 из них составляли женщины. Какой процент среди мобилизованных составляли женщины?

1) 70 2) 75 3) 85 4) 90

Учитель. Давайте обсудим, какие задачи вызвали у вас затруднения, и поймем почему?

Подведение итогов урока

Учитель. Итак, вы сегодня решали задачи, результаты которых говорили о тяжелейших днях блокадного Ленинграда и Великой Отечественной войны в целом. Посчитайте свои баллы. Выставьте отметку:

12 баллов — отметка «5»;
8–10 баллов — отметка «4»;
6 баллов — отметка «3»;
менее 6 баллов — отметка «2».

Подсчитайте процент верно решенных вами задач.

Листы самооценки учащиеся сдают учителю, который выставляет отметки за урок.

Домашнее задание

Составьте две задачи на тему «Проценты», тематически связанные с событиями Великой Отечественной войны.

Используемые ЭОР

1. Фильм «Дорога жизни». — Режим доступа: www.youtube.com/watch?v=KBMKZAFQMm4.
2. Тест по теме «Проценты». — Режим доступа: onlinetestpad.com/ru/test/61580-test-dlya-uroka-matematiki-v-5-klasse-po-teme-procenty.

Из Интернета

Зачем танцору синус. Математика влияет на развитие мозга

Российская газета — Федеральный выпуск № 84(6952) — автор Юрий Медведев

Французские ученые искали ответ на вопрос: откуда вообще появляется способность к математике. По одной гипотезе,человек математиком рождается. По другой, склонность к этой науке — побочный эффект появления языка и речи.

В эксперименте участвовали математики и обычные люди примерно с одинаковым образованием. Всем предложили математические тесты, а также тесты на общий кругозор — по истории, географии и т.д. На томографе ученые смотрели, что происходит в мозге добровольцев.

Математики успешно выступили в обоих заданиях. «Гуманитарии» хороший результат показали в тестах на кругозор, но провалили математические. Математические тесты активировали у математиков определенные зоны в коре мозга. Но эти зоны «молчали» у добровольцев из общей группы. Они включались, когда требовалось сделать простые арифметические действия.

Вывод? Математическое мышление высокого уровня работает в зонах, которые отвечают за восприятие чисел, пространства и времени и отличаются от зон, связанных с языком. То есть, по мнению французских ученых, склонность к математике должна проявляться уже в детстве.

Почему «гуманитарии» не справляются с математическими задачами? Скорее всего, определенные зоны у них менее развиты. Но, думаю, что они заложены в мозге подавляющего числа людей, просто у одних они развивались при обучении, а у других так и остались в зачаточном состоянии, так как их не тренировали.

Словом, на часто звучащий вопрос, а зачем нам синусы и тангенсы, ответ однозначный — они мозг развивают. Кстати, в китайских балетных училищах за математику спрашивают так же строго, как за танец.

Т. КАЗАРИХИНА
г. Москва

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Для школьника всегда важно осознание того, что то, чему его учат на уроках, пригодится в дальнейшем. Поэтому учителям регулярно приходится отвечать на вопрос «А где это может нам понадобиться?».

Применение нестандартных (это слово используется здесь в смысле *непривычных для учащихся*) методов при решении задач позволяет увидеть взаимосвязь различных разделов математики, прочитать скрытое содержание задачи, прочувствовать применимость имеющихся знаний. В итоге ученики выходят на качественно иной уровень: они учатся исследовать условие задачи, переформулировать его, сводить решение задачи к решению серии более простых задач.

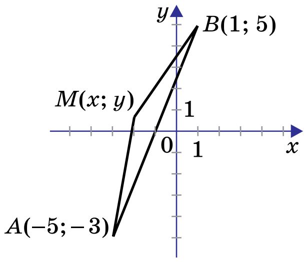
Геометрические задачи вызывают особые трудности у учащихся, а если говорить о применении геометрических методов при решении задач из других разделов математики, то тут, как показывает наш опыт, приходится сталкиваться с эмоциональным отторжением этих методов у учащихся на начальном этапе. И это несмотря на то, что применение таких методов часто позволяет красиво решить задачу и быстро прийти к ответу. Школьники обосновывают свое отторжение обычно тем, что им «до такого никогда не догадаться». Полностью соглашаясь с Д. Пойя, «Если хотите научиться решать задачи, то решайте их!», мы видим одним из способов противостоять этому — решение достаточного количества задач с помощью таких методов.

Рассмотрим несколько задач, при решении которых можно использовать понятия вектора, расстояние между точками, скалярное произведение векторов и т.д. При этом, для удобства восприятия и чтобы не загромождать изложение, часть простых моментов мы опустим (читателям придется восполнить их самостоятельно), а в конце изложения предложим задачи для самостоятельного решения.

Пример 1. Решите уравнение
$$\sqrt{x^2+y^2+10x+6y+34}+\sqrt{x^2+y^2-2x-10y+26}=10.$$

Решение. Под знаками радикалов стоят очень громоздкие выражения, поэтому преобразуем их, выделив полные квадраты. В данном случае для нас это означает «упростить левую часть уравнения»:
$$\sqrt{(x+5)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}=10.$$

Теперь посмотрим на слагаемые и подумаем, что они нам напоминают. Да это же расстояния между точками на координатной плоскости. Первое слагаемое — расстояние между точкой M с координатами $(x; y)$ и точкой $A(-5; -3)$, второе — между той же точкой M и точкой B с координатами $(1; 5)$.



Таким образом, задача сводится к нахождению всех точек $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy, сумма расстояний от которой до точек $A(-5; -3)$ и $B(1; 5)$ равна 10.

Но длина отрезка AB равна 10. Значит, точка M такова, что

$$AM + MB = 10,$$

то есть она принадлежит отрезку AB, и наоборот, любая точка отрезка удовлетворяет этому условию.

В итоге получили, что решением исходного уравнения являются такие значения x и y, для которых точка $M(x; y)$ принадлежит отрезку AB.

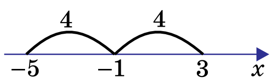
Остается задать уравнение отрезка, зная его концы, и записать ответ.

Ответ: $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$; $-5 \le x \le 1$.

Замечание

Школьникам легче будет самостоятельно научиться решать подобные уравнения, если начинать знакомить их с таким подходом как можно раньше, скажем, когда они столкнутся с понятием «модуль числа» и приступят к решению уравнений с модулем.

Зная, что $|x|$ — расстояние от точки с координатой x до начала координат, а $|x - y|$ — расстояние между точками с координатами x и y, можно сразу увидеть решение уравнения $|x + 1| = 4$. Надо найти точки координатной прямой, расстояние от которых до точки с координатой -1 равно 4. Таких точек две, они имеют координаты 3 и -5.



Тогда числа 3 и -5 и являются корнями этого уравнения.

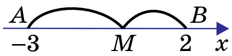
Затем можно рассмотреть более сложное уравнение

$$|x - 2| + |x + 3| = 5.$$

Заметим, что слева стоит сумма расстояний от точки M с координатой x до точек $A(2)$ и $B(-3)$ и она равна 5, однако расстояние между самими точками A и B равно 5. Значит,

$$AM + MB = AB.$$

Следовательно, решением является любая точка отрезка AB, то есть $-3 \le x \le 2$.



Для уравнения

$$|x - 2| + |x + 3| = 3,$$

рассуждая подобным образом, получаем, что слева стоит сумма расстояний от точки M до точек A и B, но эта сумма меньше длины отрезка AB, значит, таких точек M нет, а, следовательно, уравнение не имеет решений.

Аналогично, в случае

$$|x - 2| + |x + 3| = 6$$

получаем, что нам требуется найти точку M такую, что

$$MA + MB = 6.$$

Очевидно, что M лежит вне отрезка AB. Пусть C — середина отрезка AB, тогда, как известно,

$$MA + MB = 2MC$$

(расстояние от точки M, лежащей вне отрезка AB, до его середины равно среднему арифметическому расстояний до концов отрезка; это легко получить самостоятельно). Откуда получаем, что

$$2MC = 6,\ MC = 3.$$

C — середина отрезка AB, следовательно, имеет координату $-0{,}5$, тогда, так как $MC = 3$, точка M имеет координату 2,5 или $-3{,}5$. Значит, решением уравнения являются числа 2,5 и $-3{,}5$.

Для отработки навыка можно предложить учащимся решить следующие уравнения:

1. $|4 + x| + |x + 12| = 8.$
2. $|x - 15| + |x + 2| = 17.$
3. $|3 + x| + |x + 6| = 7.$
4. $|x - 5| + |x + 5| = 12.$
5. $|4 - x| + |x + 2| = 4.$
6. $|3 - x| + |x + 5| = 4.$

Иногда целесообразно сделать замену переменной. Так, в уравнении

$$|2x - 4| + |5 - 2x| = 1$$

произведем замену $2x$ на y, и уравнение примет вид

$$|y - 4| + |5 - y| = 1.$$

Воспользовавшись тем, что

$$|5 - y| = |y - 5|,$$

получим:

$$|y - 4| + |y - 5| = 1.$$

Откуда $4 \le y \le 5$. Значит, $4 \le 2x \le 5$, следовательно, $2 \le x \le 2{,}5$.

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4y - 3x = 17, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 10x + 6y + 34} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26} = 10. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы мы решили (см. пример 1). Решением его являются пары $(x; y)$, удовлетворяющие условию

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{11}{3};\ -5\le x\le 1. \qquad (*)$$

Получается, что требуется найти общие точки прямой $4y - 3x = 17$ и отрезка (*). Решая систему линейных уравнений, получаем пару (1; 5), которая является решением исходной системы.

Пример 3. Решите уравнение

$$\sqrt{(1-2x)^2+4}+\sqrt{(2x+3)^2+1}=5.$$

Данное уравнение несложно решить с помощью замены переменной и возведением в квадрат. Однако заметим, что подкоренные выражения представляют собой суммы квадратов, а потому посмотрим на данное уравнение под другим углом, а именно используем понятие вектора.

Решение. Рассмотрим векторы

$$\vec{a}\{1-2x;2\},\ \vec{b}\{2x+3;1\},\ \vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$$

Тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{(1-2x)^2+4},\ |\vec{b}|=\sqrt{(2x+3)^2+1},$$

$$\vec{c}\ \{4;3\},\ |\vec{c}|=5.$$

Получаем, что $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$. Значит, векторы сонаправлены и их координаты пропорциональны:

$$\frac{1-2x}{2x+3}=\frac{2}{1},\ x=-\frac{5}{6}.$$

Замечание

Исходное уравнение может быть переписано в виде

$$\sqrt{4+(2x-1)^2}+\sqrt{(2x+3)^2+1}=5$$

или даже в виде

$$\sqrt{4x^2+4x+5}+\sqrt{4x^2+4x+10}=5.$$

Тогда, разумеется, надо догадаться, векторы с какими координатами надо рассмотреть, потому что

$$\vec{a}\{2x-1;2\},\ \vec{b}\{2x+3;1\}$$

не подойдут в данном случае. Попытайтесь самостоятельно применить данный подход к этим векторам и ответить на вопрос: почему такой выбор неудачен.

Пример 4. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1}\sqrt{9-2x}+\sqrt{2x-8}=\sqrt{x}.$$

Решение. Рассмотрим векторы

$$\vec{a}\{\sqrt{x-1};1\},\ \vec{b}\{\sqrt{9-2x};\sqrt{2x-8}\}.$$

Найдем их скалярное произведение через координаты:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{x-1}\sqrt{9-2x}+\sqrt{2x-8}.$$

То есть левая часть уравнения представляет собой скалярное произведение этих векторов. Найдем длины этих векторов:

$$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1}=\sqrt{x},$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{\left(\sqrt{9-2x}\right)^2+\left(\sqrt{2x-8}\right)^2}=1.$$

Таким образом, правая часть есть произведение длин $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получили, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, а значит, векторы сонаправлены, следовательно, их координаты пропорциональны:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{9-2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x-8}}.$$

Возведем в квадрат обе части полученного уравнения:

$$\frac{x-1}{9-2x}=\frac{1}{2x-8}.$$

Решив это уравнение, не забывая про ограничения на x, которые получаются из исходного уравнения, находим:

$$x=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}.$$

В заключении предлагаем несколько аналогичных **заданий для самостоятельного решения.**

1. Найдите все a, при каждом из которых система имеет решение:

$$\begin{cases}4y-3x=a,\\ \sqrt{x^2+y^2+10x+6y+34}+\sqrt{x^2+y^2-2x-10y+26}=10.\end{cases}$$

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(x+6)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}=13;$

б) $\sqrt{(4-3x)^2+16}+\sqrt{(3x+2)^2+16}=10;$

в) $\sqrt{2-x}\sqrt{5-3x}+\sqrt{x}\sqrt{3x+4}=\sqrt{18}.$

Литература

1. *Блинков А.Д.* Геометрия в негеометрических задачах. — М.: МЦНМО, 2016.

2. *Генкин Г.З.* Геометрические решения негеометрических задач. — М.: Просвещение, 2007.

3. *Кушнир И.А.* Геометрические решения негеометрических задач // Квант, 1989, № 11.

4. *Супрун В.П.* Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач: Учебное пособие. — Изд. стреотип. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.

Н. ФИРСТОВА,
г. Москва

Статья опубликована: Архимед: научно-методический сборник. — М.: МАКС Пресс, 2019

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МЕТОДУ ОБЪЕМОВ

Суть метода: алгебраизация геометрических задач (решение их методами алгебры) за счет использования свойств объемов и применения формул их вычисления для различных геометрических тел.

Компоненты метода:

1) выбор формул объемов, которые целесообразно применять для решения задачи;

2) составление уравнений и систем уравнений на основе применения формул вычисления объема для одного и того же геометрического тела;

3) составление равенства, содержащего объемы тел, на основе свойства аддитивности объемов и замена их выражениями, по которым их можно вычислить;

4) составление уравнений и систем уравнений, содержащих объемы тел, на основе применения формул вычисления объема и свойства инвариантности объемов для равновеликих тел.

Метод объемов может быть реализован различными способами — с помощью метода разбиения, метода дополнения, интегрального метода, метода пределов и принципа Кавальери. Для учащихся сразу же необходимо заметить, что последние два метода применяются в основном для вывода формул объемов, поэтому рассматривать их более подробно на данном этапе нет необходимости. Интегральный метод мы также не рассматриваем подробно, но уже по другой причине: дело в том, что в школьных учебниках понятие интеграла вводится без введения необходимых понятий, на уровне формул, что затрудняет понимание учащимися области и целесообразности его применения.

Таким образом, говоря с учениками о методе объемов, мы подробно останавливаемся на методе разбиения (табл.1) и методе дополнения (табл. 2).

В качестве иллюстрации применения «метода объемов» и формирования действий по его использованию следует рассмотреть следующую конструктивную задачу, полностью демонстрируемую учителем.

Задача. Найдите способ, позволяющий вписать в куб сразу четыре пирамиды: две треугольные и две четырехугольные, так, чтобы их суммарный объем был наибольшим.

Указание. Куб $A...D_1$ разбивается на две равные призмы плоскостью, проходящей через ребра B_1C_1 и AD. Каждая из двух призм разбивается на две пирамиды, одна из которых — четырехугольная, а другая — треугольная.

Таблица 1

Метод разбиения	
Суть метода: геометрическое тело пытаются разбить на конечное число частей	
Форма (признаки выбора) метода	**Способ реализации метода**
МР-1. Если в условии задачи геометрическое тело уже разбито на несколько геометрических тел (проведено сечение) или указан способ построения сечения	*Способ I.* Составляют из полученных после разбиения частей новое геометрическое тело, объем которого уже известен. *Способ II.* Находят объемы полученных после разбиения частей и выражают объем исходного геометрического тела на основании свойства аддитивности
МР-2. Если геометрическое тело, о котором идет речь, следует разбить на конечное число непересекающихся геометрических тел, объем которых можно элементарно вычислить	*Способ I.* Составляют из полученных после разбиения частей новое геометрическое тело, объем которого уже известен. *Способ II.* Находят объемы полученных после разбиения частей и выражают объем исходного геометрического тела на основании свойства аддитивности
МР-3. Если из геометрического тела, о котором идет речь, можно вычленить геометрическое тело, объем которого известен (или относительно легко вычисляется)	Находим объем вычлененного геометрического тела, используя свойство инвариантности объемов

План решения

1. Разобьем куб $A...D_1$ сечением AB_1C_1D на две равные треугольные призмы: DCC_1B_1AB и $ADC_1B_1A_1D_1$ (рис. 1).

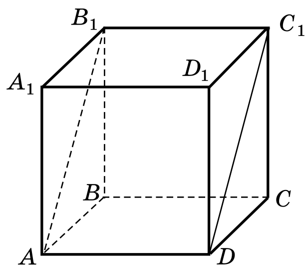


Рис. 1

2. Разобьем призму $ADC_1B_1A_1D_1$ (рис. 2) плоскостью AD_1B_1 на четырехугольную пирамиду $D_1AB_1C_1D$ и треугольную пирамиду $D_1AA_1B_1$.

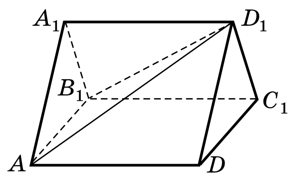


Рис. 2

3. Разобьем призму ADC_1B_1BC плоскостью ACB_1 на четырехугольную пирамиду BAB_1C_1D и треугольную пирамиду $CABB_1$.

4. Поскольку четыре пирамиды заполняют весь объем куба, их суммарный объем максимален.

Примеры задач на применение метода объемов

При изучении метода разбиения и метода дополнения целесообразно решить с учащимися в классе или предложить им для самостоятельной работы следующие задачи.

Задача 1. Дан куб $A...D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT, где T — середина AD.

Метод решения: метод разбиения МР-3. *Реализация метода*: вычленение из исходного геометрического тела нового тела, содержащего искомую величину, объем которого известен.

Указание. Куб $A...D_1$ плоскостью A_1BT разбивается на два тела: пирамиду $ABTA_1$ и тело $TBDD_1C_1B_1A_1$ (рис. 3).

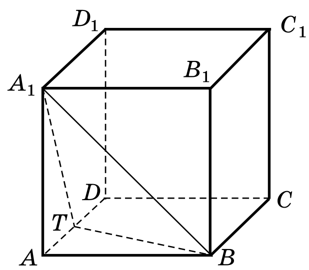


Рис. 3

Расстояние от вершины A до плоскости A_1BT — высота треугольной пирамиды $ABTA_1$.

План решения

1. Рассмотрим пирамиду $ABTA_1$ с основанием TBA_1 и пирамиду A_1ABT с основанием ABT и найдем их объемы.

2. Используем свойство инвариантности объема и найдем высоту пирамиды $ABTA_1$.

Задача 2. Дан куб $A...D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

Метод решения: метод разбиения МР-3. *Реализация метода*: вычленение из исходного геометрического тела нового тела, содержащего искомую величину, объем которого известен.

Таблица 2

Метод дополнения	
Суть метода: будем дополнять геометрическое тело равными частями так, чтобы объем получившегося после такого дополнения тела и объемы дополняющих частей были известны	
Форма (признаки выбора) метода	**Способ реализации метода**
МД-1. Три ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны	Достраиваем тетраэдр до параллелепипеда так, чтобы вершины тетраэдра являлись вершинами параллелепипеда
МД-2. В условии задачи даны сведения о противоположных ребрах тетраэдра	Достраиваем тетраэдр до параллелепипеда: через каждое ребро тетраэдра проводим плоскость, параллельную противолежащему ребру
МД-3. Данное геометрическое тело дополняемо геометрическим телом известного объема до другого геометрического тела, объем которого можно вычислить	Достраиваем геометрическое тело до другого геометрического тела (известного объема)

Указание. Куб $A...D_1$ плоскостью ABC_1D_1 разбивается на две равные треугольные прямые призмы: ADD_1BCC_1 и $AA_1D_1BB_1C_1$ (рис. 4).

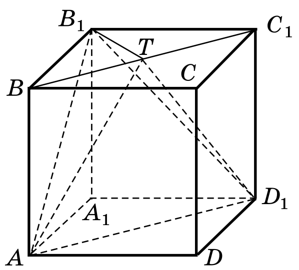


Рис. 4

Расстояние от середины T отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1 — это высота треугольной пирамиды TAD_1B_1, полностью лежащей в треугольной прямой призме $ABC_1D_1A_1B_1$ (рис. 5).

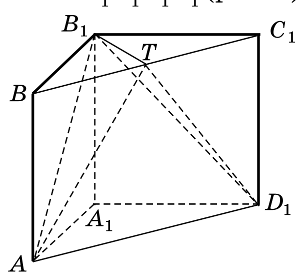


Рис. 5

Задача 3. Плоскость, проходящая через одно из ребер правильного тетраэдра, делит его объем в отношении 3 : 5. Найдите тангенсы углов α и β, на которые эта плоскость делит двугранный угол тетраэдра.

Метод решения: метод разбиения МР-1. *Реализация метода*: нахождение объемов полученных после разбиения частей и выражение объема исходного геометрического тела через сумму объемов.

Указание. Тетраэдр $SABC$ плоскостью сечения ABE разбивается на пирамиды $SABE$ и $CABE$ с общим основанием ABE (рис. 6).

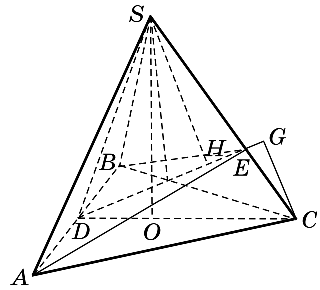


Рис. 6

Данное отношение объемов позволяет найти отношение высот этих пирамид и отношение синусов искомых углов SDH и GDC (рис. 7).

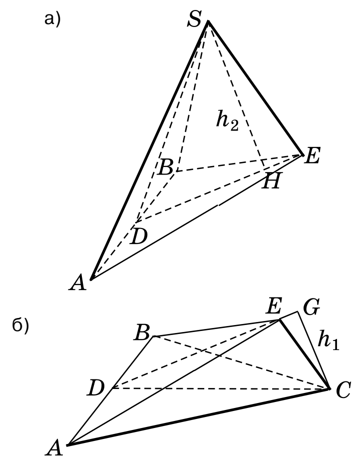


Рис. 7

Задача 4. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках A и B равны α, $AB = a$. Определите объем пирамиды.

Метод решения: метод разбиения МР-2. *Реализация метода*: нахождение объемов полученных после разбиения частей и выражение объема исходного геометрического тела через сумму объемов.

Указание. Проведем высоты равнобедренных треугольников ABC и SAB, точка D — их пересечение (рис. 8).

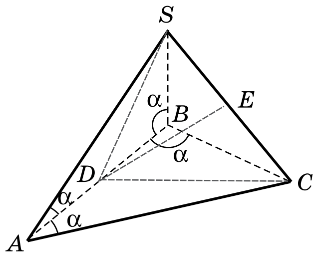


Рис. 8

Пирамида $SABC$ плоскостью SDC разбивается на пирамиды $ASDC$ и $BSDC$ с общим основанием SDC. Объем пирамиды вычисляется как сумма объемов пирамид $ASDC$ и $BSDC$.

Задача 5. Боковые ребра треугольной пирамиды равны a, b, c. Плоские углы при вершине прямые. В пирамиду вписан куб так, что одна его вершина находится в вершине пирамиды, а противоположная лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите ребро куба.

Метод решения: метод разбиения МР-3. *Реализация метода*: вычленение из исходного геометрического тела нового тела, содержащего искомую величину, объем которого известен.

Указание. Треугольная пирамида $CABP$ разбивается на три треугольные пирамиды: R_1ABP, R_1ACP, R_1BCP, у которых общая вершина R_1 и одинаковая высота x, равная по длине ребру куба (рис. 9).

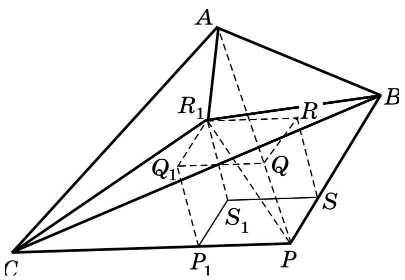


Рис. 9

Задача 6. Два противоположных ребра тетраэдра равны a, два других равны b, два оставшихся — c. Найдите его объем.

Способ I. Метод решения: метод разбиения МР-2. *Реализация метода*: нахождение объемов полученных после разбиения частей и выражение объема исходного геометрического тела через сумму объемов.

Указание. Тетраэдр $ABCD$ плоскостью $DCFE$, где FE — параллельная проекция DC на плоскость, содержащую сторону AB, разбивается на равные треугольные пирамиды $AODC$ и $BODC$ (рис. 10).

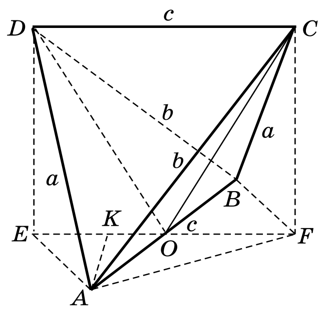


Рис. 10

Объем тетраэдра $ABCD$ — сумма объемов пирамид $AODC$ и $BODC$.

Способ II. Метод решения: метод дополнения МД-2. *Способ реализации метода*. Достраиваем тетраэдр до параллелепипеда. Через каждое ребро тетраэдра проводим плоскость, параллельную противолежащему ребру.

Указание. Объем тетраэдра найдем, пользуясь объемом параллелепипеда (рис. 11).

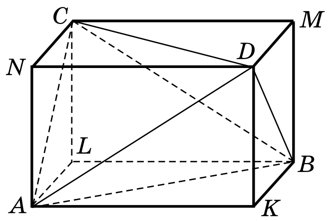


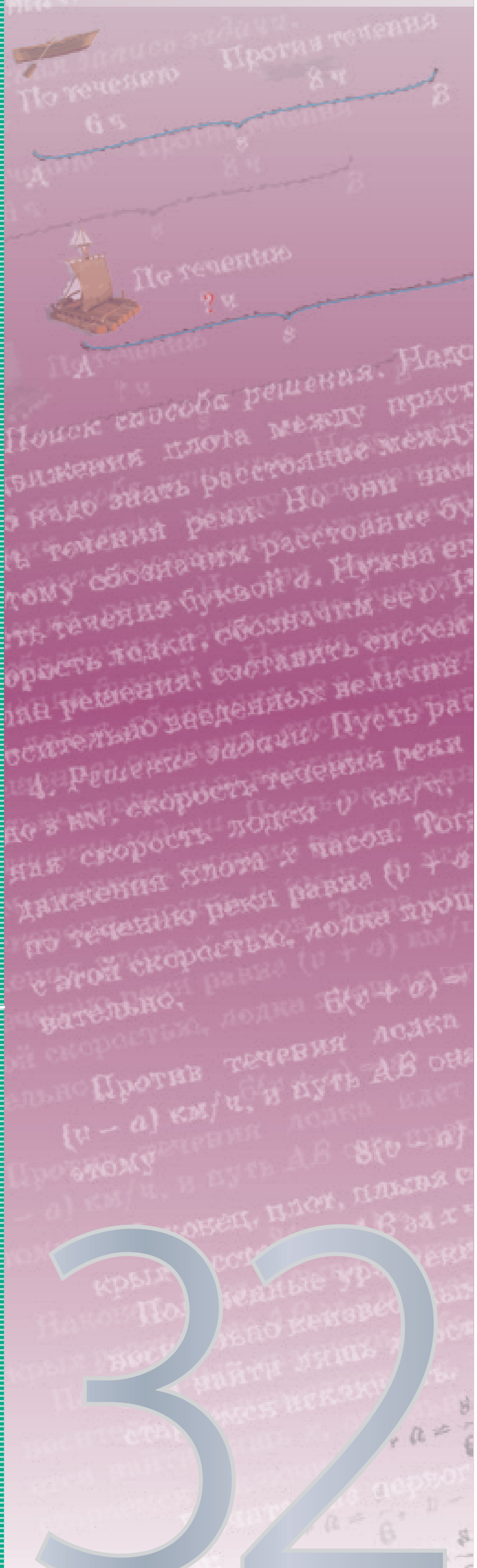
Рис. 11

Литература

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Часть II. Стереометрия. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1951. **2.** *Баврин И.И., Садчиков В.А.* Новые задачи по стереометрии: Фигуры вращения правильных многогранников. — М.: Владос, 2000. **3.** *Бескин Л.Н.* Стереометрия. Пособие для учителей средней школы. — М.: Просвещение, 1972. **4.** *Бескин Н.М.* Методика геометрии. Учебник для педагогических институтов. — М.–Л.: Учпедгиз, 1947. **5.** *Болтянский В.Г.* О понятиях площади и объема // Квант, 1977, № 5. **6.** *Паповский В.М.* Углубленное изучение геометрии в 10–11 классах. Книга для учителя. Методические рекомендации к преподаванию курса геометрии в 10–11 классах по учебному пособию А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика. — М.: Просвещение, 1993.

С. УЛЬЗУТУЕВА,
г. Чита,
Забайкальский край

ФОРМИРОВАНИЕ ОПЫТА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ



Математика как предмет имеет большие возможности по формированию опыта исследовательской работы, а решение задач — важнейшее средство формирования умения проводить поисковую и исследовательскую деятельность.

Учитель, желающий обучать детей исследовательской работе, должен начать с обучения решению задач. А научив своих учеников методам решения задач, сможет вовлечь их в поисковую и исследовательскую деятельность.

Решение задач в математическом образовании занимает важное место. Но, пожалуй, самый распространенный способ такого обучения — показ способов решения определенных видов задач и значительная, порой изнурительная, практика по овладению ими. Нас интересует не этот подход.

Для того чтобы научиться решать задачи, надо много поработать. Но эта работа не сводится лишь к решению большого количества задач. Надо научиться такому подходу к задаче, при котором она выступает как объект тщательного изучения, а ее решение — как объект конструирования и изобретения. Чтобы сформировать у школьников умение успешно решать задачи, нужно дать им необходимые сведения о сущности задач и их решений, что позволит школьнику осознавать свою деятельность при их решении. Необходимо стимулировать постоянный анализ учащимися своей деятельности по решению задач, выделению в них общих подходов и методов, их осмыслению и обоснованию.

Составные части задачи

Задача представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, учитывая те особенности, что указаны в условии. Перед началом решения необходимо провести анализ задачи: установить, в чем состоят ее требования, каковы особенности, исходя из которых надо решать задачу. Анализ условия всегда направлен на его требование. Умение анализировать задачу, проникать в ее суть — это главное в общем умении решить задачу.

Пример 1. Сколько цифр содержит число 2^{100} (в десятичной системе счисления)?

Формулировка этой задачи состоит из одного вопроса. Но, вдумавшись в этот вопрос, можно вычленить такие условия:

1) 2^{100} есть натуральное число;

2) его можно записать в виде многозначного числа.

Требование этой задачи: найти, сколько цифр содержит запись этого многозначного числа.

В более сложных задачах рассмотренный выше анализ целесообразно продолжить. А именно установить, как устроены (из чего состоят) вычлененные условия.

Пример 2. К двум окружностям, радиусы которых 4 и 6, проведены внутренние общие касательные, оказавшиеся взаимно перпендикулярными. Вычислите расстояние между центрами окружностей.

Эта задача содержит такие условия:

1) даны окружности с центрами в точке O_1 радиуса 4 и в точке O_2 радиуса 6;

2) у этих окружностей есть общие внутренние касательные;

3) эти касательные взаимно перпендикулярны.

Анализируя эти условия, можно заметить, что каждое из них состоит из одного или нескольких объектов и некоторой их характеристики. Если дан один объект, то указывается его характеристика в виде некоторого свойства этого объекта; если же даны два объекта, то характеристикой служит некоторое отношение этих объектов.

Анализ таких задач проводится по такой форме: условия — объекты условия — их характеристики.

Результаты предварительного анализа задач лучше всего фиксировать в виде таблицы или схемы. Схематическая запись задачи отличается широким использованием в ней разного рода обозначений, символов, букв; в ней четко выделены все условия и требования задачи, а в записи каждого условия указаны объекты и их характеристики; в ней зафиксировано лишь то, что необходимо для решения задачи, ненужные подробности отбрасываются.

Примеры таблиц для некоторых видов задач:

1. Задачи на движение:

v	t	s

2. Задачи на совместную работу:

N	t	A

3. Задачи на проданный продукт:

Цена	Количество	Стоимость

Для схематической записи, например, задач на движение или геометрических задач полезно использовать чертеж, который должен удовлетворять следующим требованиям:

– чертеж должен соответствовать задаче;

– чертеж представляет собой схематичный рисунок основного объекта задачи с обозначением с помощью букв и других знаков всех элементов фигуры и некоторых их характеристик;

– при построении чертежа нет необходимости строго выдерживать определенный масштаб, но желательно соблюдать какие-то пропорции в построении отдельных элементов фигуры;

– при построении чертежей пространственных фигур необходимо соблюдать правила черчения таких фигур.

Сущность и структура решения математических задач

Решить математическую задачу — это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется в задаче — ее ответ.

Можно выделить следующие этапы процесса решения задачи:

1. *Анализ задачи*. Определяем, что это за задача, каковы ее условия, в чем состоят ее требования.

2. *Схематическая запись задачи*. Оформляем анализ задачи в виде разного рода схем или таблиц.

3. *Поиск способа решения*. На основе анализа задачи и ее схематической записи выбираем способ решения.

4. *Осуществление способа решения*.

5. *Проверка решения задачи*. Убеждаемся, что решение верное и оно удовлетворяет всем требованиям задачи.

6. *Исследование задачи*. Устанавливаем, при каких условиях задача имеет решение; сколько различных решений существует в каждом отдельном случае; при каких условиях задача не имеет решений.

7. *Запись ответа*. Убедившись в правильности решения и проведя исследование, четко формулируем ответ.

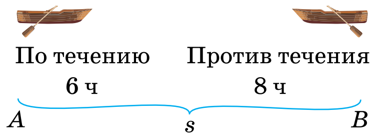
8. *Анализ решения*. Устанавливаем, нет ли другого, более рационального решения, какие выводы можно сделать из этого решения, нельзя ли обобщить задачу.

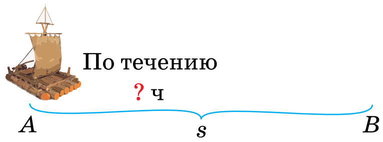
Пример 3. Лодка прошла по течению реки расстояние между двумя пристанями за шесть часов, а на обратный путь затратила восемь часов. За какое время преодолеет расстояние между пристанями плот, пущенный по течению реки?

1. *Анализ задачи*. Объекты: лодка и плот. Лодка имеет собственную скорость, река и плот

имеют определенную скорость течения. Поэтому время, затраченное на движение по течению, меньше, чем время, затраченное на движение против течения. Но расстояние между пристанями неизвестно, собственная скорость лодки и скорость течения тоже неизвестны. Но искать надо не эти величины, а время, за которое плот пройдет расстояние между пристанями.

2. *Схематическая запись задачи.*





3. *Поиск способа решения.* Надо найти время движения плота между пристанями. Для этого надо знать расстояние между ними и скорость течения реки. Но они нам неизвестны, поэтому обозначим расстояние буквой s, а скорость течения буквой a. Нужна еще собственная скорость лодки, обозначим ее v. Из этого следует план решения: составить систему уравнений относительно введенных величин.

4. *Решение задачи.* Пусть расстояние AB равно s км, скорость течения реки a км/ч, собственная скорость лодки v км/ч, а искомое время движения плота x часов. Тогда скорость лодки по течению реки равна $(v + a)$ км/ч. За 6 ч, идя с этой скоростью, лодка прошла путь AB, следовательно,

$$6(v + a) = s.$$

Против течения лодка идет со скоростью $(v - a)$ км/ч, и путь AB она проходит за 8 ч, поэтому

$$8(v - a) = s.$$

Наконец, плот, плывя со скоростью a км/ч, покрыл расстояние AB за x ч, следовательно, $ax = s$.

Полученные уравнения образуют систему относительно неизвестных s, a, v, x. Так как требуется найти лишь x, остальные неизвестные постараемся исключить.

$$v + a = \frac{s}{6},\ v - a = \frac{s}{8}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$2a = \frac{s}{6} - \frac{s}{8},\ a = \frac{s}{48}.$$

Подставив полученное выражение для a в третье уравнение, получим:

$$\frac{s}{48}x = s,\ x = 48.$$

5. *Проверка решения.* Достаточно проверить, будут ли равны собственные скорости лодки, найденные разными способами.

6. *Исследование задачи.* В данном случае этот этап не нужен.

7. *Ответ.* Плот проплывет расстояние между пристанями за 48 ч.

8. *Анализ решения.* Решение задачи было сведено к решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако найти надо было лишь одно. Возможно, приведенное решение не самое удачное, хотя и достаточно простое.

Для стандартных задач есть правила, пользуясь которыми можно найти решение задачи определенного вида, и решение таких задач сводится к распознаванию вида задач и составлению последовательности шагов на основе общего правила.

Чтобы решать стандартные задачи, школьник должен:

– помнить все изученные общие правила и положения, их полезно записывать в справочник;

– уметь развертывать общие правила, формулы, определения, тождества в последовательность шагов решения задач определенного типа.

Задача учителя состоит в том, чтобы научить школьника на основе общих положений и правил, заложенных в память и записанных в справочник, развертывать их в последовательность шагов решения задач определенного типа.

Для формирования умения исследовательской деятельности учащихся особый интерес представляют нестандартные задачи, то есть задачи, для которых нет общих правил и положений, определяющих точную программу их решения.

При решении нестандартных задач можно посоветовать последовательно применять две операции:

– сведение (путем преобразования или переформулирования) нестандартной задачи к другой, ей эквивалентной, но уже стандартной задаче;

– разбиение нестандартной задачи на несколько стандартных подзадач.

В зависимости от характера задачи можно использовать либо одну из этих операций, либо обе.

Пример 4. При каких значениях переменной y значение суммы дробей

$$\frac{y+2}{y+3} \text{ и } \frac{y+5}{y-3}$$

равно значению их произведения?

Решение. Найдем сумму данных дробей и их произведение. Сравним полученные дроби. Значения этих дробей будут равны при тех значениях переменной y, при которых числители равны, а знаменатели не равны нулю. Следователь- но, надо решить уравнение $y^2 - 1 = 0$ при условии $y^2 - 9 \neq 0$. Уравнение имеет корни 1 и -1, и при этих значениях знаменатели не равны нулю.

Ответ: -1; 1.

Решение этой задачи мы разбили на подзадачи:

1) нахождение суммы двух дробей;
2) нахождение произведения двух дробей;
3) решение квадратного уравнения;
4) проверка выполнения условия неравенства нулю знаменателей дробей.

Решив эти четыре стандартные задачи, мы решили и исходную нестандартную задачу.

Поиск плана решения задач

Часто, приступая к решению задачи, нельзя сразу сказать: стандартная она или нет. Чтобы решить ее, надо составить план решения. Задача учителя — помочь школьнику научиться этому. С этой целью можно порекомендовать им такой план поиска решения нестандартных задач.

1. Свести задачу к одной из ранее решенных.
2. Если можно, выделить в задаче части, которые представляют собой легко решаемые самостоятельные задачи, решить их, после чего преобразовать исходную задачу с учетом полученных результатов. После такого преобразования исходная задача становится проще.
3. При решении необходимо следить за тем, чтобы полностью использовать каждое из данных условий.
4. Не жалеть сил и времени на анализ задачи, искать для данной задачи подобные ей, чем-либо похожие на нее среди решенных ранее. Использовать эти аналоги как возможные идеи решения.

Моделирование в процессе решения задач

Психолог С.Л. Рубинштейн, изучая процесс решения задач, характеризовал его как процесс переформулирования задач, в котором непрерывно производится анализ условий и требований задачи через синтетический акт их соотнесения. Здесь анализ (разложение, разбор) есть метод научного исследования путем разложения (фактического или мысленного) предмета на его составные части, а синтез (соединение, составление) есть метод изучения предмета в его целостности, в единстве и взаимной связи его частей.

В ходе переформулирования задачи создаются новые, являющиеся моделями той ситуации, которая описывается в исходной задаче. Переформулирование задачи является способом ее моделирования. Метод моделирования состоит в том, что для исследования какого-либо явления или объекта выбирают или строят другой объект, в каком-либо отношении подобный данному. Построенный или выбранный объект изучают и с его помощью решают исследовательские задачи, а затем результаты решения переносят на первоначальное явление или объект.

Пример 5. Задача Ньютона. Трава на лугу растет одинаково быстро и густо. Известно, что 70 коров съели бы ее за 24 дня, а 30 — за 60 дней. Сколько коров съели бы траву за 96 дней?

Решение. Составим уравнение или систему уравнений, которые представляют собой модель данной задачи.

Заданные в задаче величины — количество коров и число дней — не связаны непосредственно, поэтому введем вспомогательные неизвестные, параметры, для установления связи между основными величинами.

Пусть на лугу было a единиц травы и ежедневно на нем вырастает b единиц травы, а каждая корова за 1 день съедает c единиц. Тогда, в соответствии с условием, получаем, что за 24 дня на лугу будет $a + 24b$ единиц травы, которую за это время съедят 70 коров. Они съедают $24 \cdot 70 \cdot c = 1680c$, следовательно,

$$a + 24b = 1680c. \qquad (1)$$

По условию, 30 коров съедают всю траву за 60 дней. Отсюда получаем:

$$a + 60b = 1800c. \qquad (2)$$

За 96 дней на лугу будет $a + 96b$ единиц травы, которую съедят коровы в искомом числе. Всего они съедят $96xc$ единиц травы, следовательно, получим такое уравнение:

$$a + 96b = 96xc. \qquad (3)$$

Уравнения (1), (2) и (3) образуют систему, которая и есть модель исходной задачи. Эту систему нужно решить относительно искомого x.

Вычтем почленно из уравнения (2) уравнение (1), получим:

$$36b = 120c,\ c = 0{,}3b.$$

Подставим полученное значение c в уравнение (1):

$$a + 24b = 504b,\ a = 480b.$$

Подставим найденные выражения c и a в уравнение (3), получим:

$$480b + 96b = 28{,}8xb,\ 576b = 28{,}8xb,\ x = 20.$$

Ответ: 20 коров.

Рекомендации для поиска решения задач

1. Прочтя задачу, попытайтесь установить, к какому виду она принадлежит.
2. Если вы узнали в ней стандартную задачу знакомого вида, то примените для ее решения известное вам общее правило.
3. Если задача не является стандартной, то следует действовать в следующих направлениях:

а) вычлените из нее подзадачу или разбейте ее на несколько подзадач стандартного вида (*способ разбиения*);

б) введите в условие дополнительные элементы: вспомогательные параметры, вспомогательные построения (*способ вспомогательных элементов);*

в) переформулируйте ее, замените ее другой равносильной задачей (*способ моделирования*).

4. Для того чтобы легче было осуществить указанные способы, предварительно постройте наглядную вспомогательную модель задачи — ее схематичную запись.

Решение нестандартных задач есть искусство, которым можно овладеть лишь в результате глубокого постоянного самоанализа действий по решению задач и постоянной тренировки в решении разнообразных задач. Помните, что решение задач есть вид творческой деятельности, а поиск решения есть процесс изобретательства.

Литература

1. *Чошанов М.А.* Гибкая технология проблемно-модульного обучения: методическое пособие. — М.: Народное образование, 1996. **2.** *Гордон В.О.* Лекции по методике математики для учителей профильной школы. 2010–2015. **3.** *Далингер В.А.* Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике: учебное пособие. — Омск: ОмГПУ, 2015. **4.** *Крысин А.Я., Руденко В.Н., Садкова В.И.* и др. Поисковые задачи по математике (4–5 классы): Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 2016. **5.** *Русанов В.М.* Математические олимпиады школьников. — М.: Просвещение, 2010. **6.** *Фридман Л.М., Турецкий Е.Н.* Как научиться решать задачи: учебное пособие. — М.: Просвещение, 2015. **7.** *Гальперин П.Я.* Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Психология как объективная наука / П.Я. Гальперин. — М.: Институт практической психологии, 1976.

Из Интернета

Насколько математика полезна для здоровья?

https://today.duke.edu/2016/10/could-mental-math-boost-emotional-health

Удивительные результаты исследования получили ученые из Университета Дьюка в США. Они обнаружили, что решение математических задач не только тренирует наш мозг, как принято считать, но также способствует сохранению психологического здоровья.

Под психологическим здоровьем понимается отсутствие сильно выраженных эмоциональных переживаний, мешающих достижению целей и задач, которые человек ставит перед собой. Психологическое здоровье является более широким понятием, чем психическое здоровье, по сути, это здоровье, которое позволяет человеку чувствовать себя счастливым.

Что обнаружили исследователи? Они установили, что во время решения математических задач в уме включаются определенные части мозга, которые ответственны за развитие навыков психологической и эмоциональной саморегуляции.

Несмотря на то, что связь между эмоциями и математикой может показаться неочевидной, холодные расчеты не принято связывать с регулированием горячих эмоций — способностью манипулировать и обновлять информацию.

Исследователи проанализировали активность мозга при помощи магнитно-резонансной томографии (МРТ) в то время, когда испытуемые решали математические задачи по памяти.

Включение памяти на основе математических задач стимулирует область мозга, которая связана с депрессией и тревогой. Исследования показали, что, например, более высокая активность в этой области связана с меньшим количеством симптомов тревоги и депрессии. В исследовании было показано, что активирование данного отдела мозга при занятиях математикой с большой вероятностью приводит к тому, что человек способен управлять своими мыслями в эмоционально сложных ситуациях.

Пока не установлено, почему это так, но это вписывается в гипотезу о том, что способность совершать сложные математические вычисления, возможно, поможет человеку научиться саморегуляции в сложных эмоциональных ситуациях, позволяя не зацикливаться на одном негативном образе и переживании. Исследование открывает новые возможности для людей. Оно создает предпосылки для гармоничной и счастливой жизни, его результаты помогут предотвратить депрессии и тревогу.

Ученые отмечают, что отношения между математикой и эмоциями требуют дальнейшего изучения. Результаты исследования были опубликованы в журнале «Клиническая психология» 6 октября 2016 г.

Справка. Университет Дьюка — частный исследовательский университет. Основан в 1838 году в США. В 2014 году занял 23-ю позицию в Академическом рейтинге университетов мира. В 1994 году при университете был открыт научно-исследовательский центр Левин, предназначенный для проведения междисциплинарных исследований.

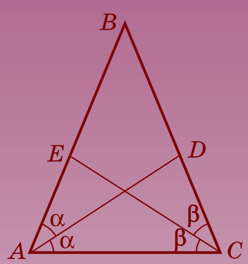
ТЕМА УРОКА: «ЗАДАЧА ШТЕЙНЕРА–ЛЕМУСА»

О. ЗАПАСНИК,
г. Санкт-Петербург

Фрагмент презентации публикуется в авторской редакции

Якоб Штейнер

«American Mathematical Monthl» — обзорный сборник математических статей для широкого круга читателей



Если в треугольнике равны две биссектрисы, то этот треугольник является равнобедренным

Тип урока: урок-исследование.
Учебник: Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 7–9: учеб. для общеобразоват. учреждений. — 15-е изд. — М.: Просвещение, 2005.
Цель: формирование навыков исследовательской деятельности учащихся путем систематизации приемов решения задач на доказательство на примере задачи Штейнера–Лемуса с целью активизации познавательной деятельности.
Задачи:
– обобщить и расширить теоретические знания по теме «Равнобедренный треугольник. Признаки, свойства», систематизировать стандартные приемы и рассмотреть комбинированные способы решения задач на доказательство;
– формирование регулятивных универсальных действий: алгоритмизация действий, установление причинно-следственных связей, навыков анализа, оценки и самооценки, умения анализировать, сопоставлять факты, осознанно и произвольно строить речевые высказывания;
– формирование коммуникативных умений, обеспечивающих социальную компетентность, строить продуктивное взаимодействие и сотрудничество со сверстниками.

ХОД УРОКА

Объявление темы урока (5 мин)

Учитель. Какие утверждения, связанные с равнобедренным треугольником, вы знаете? 2 – 4

Какие приемы доказательства утверждений вы используете на уроках геометрии?

[Прямое доказательство, доказательство от противного.]

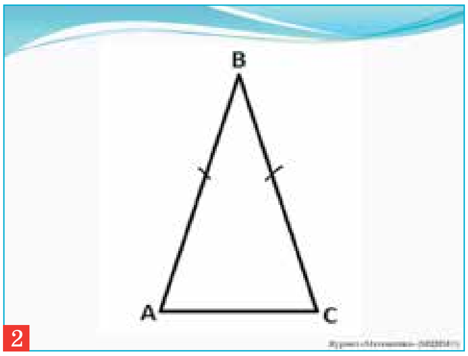
Ученики совместно с учителем повторяют способ доказательства признака равнобедренного треугольника и свойства об его углах (учебник, с. 34, 72).

Учитель. Встречались ли вы с задачей Штейнера–Лемуса? Попытайтесь соединить понятия, которые мы повторили, и сформулируйте тему урока.

Учащиеся выдвигают предположение о том, что на уроке будет рассматриваться применение нового способа доказательства утверждения, связанного с равнобедренным треугольником, предложенного математиками Штейнером и Лемусом.

Учитель обобщает высказывания учащихся и формулирует тему урока 5*, знакомит учеников с формой работы (урок-исследование) и правилами заполнения рабочих листов.*

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.



Рабочий лист. Тема урока: «Задача Штейнера–Лемуса»

____

Фамилия, имя

Историческая справка. Существует ряд геометрических задач, которые околдовывают каждого, кто по воле случая сталкивается с ними. Одна — всегда возбуждавшая интерес задача (теорема) Штейнера–Лемуса. С виду простое утверждение не имеет простого классического доказательства.

Этот факт тем более удивителен, что, заменив «биссектрисы» на «медианы» или «высоты», получаем утверждения, доказательства которых элементарны.

Эта теорема была передана шведскому геометру, члену Берлинской академии наук, Якобу Штейнеру в 1840 году Кристианом Лудольфом Лемусом, немецким математиком, профессором Берлинского университета, с просьбой дать чисто геометрическое доказательство.

Штейнер дал довольно сложное доказательство, которое вдохновило многих исследователей на поиск более простых. Работы по теореме Штейнера–Лемуса появлялись в различных журналах в 1842, 1844, 1848 годах и почти каждый год с 1854-го по 1864 год, а также в большом количестве в течение следующего столетия. В 1963 году журнал «American Mathematical Monthly» объявил конкурс на лучшее доказательство теоремы. Было прислано много доказательств, среди которых обнаружились интересные и ранее неизвестные.

Задание 1. Приемы (способы) доказательства геометрических утверждений.

1.______________________________
2.______________________________
3.______________________________
4.______________________________
5.______________________________
6.______________________________
7.______________________________

Задание 2. Докажите утверждение. Запишите доказательство в виде блок-схемы, указывая над стрелками ссылки на теоретические факты.

Утверждение 1. Если в треугольнике равны две высоты (рис. 1), то этот треугольник равнобедренный.

Дано: $\triangle ABC$, $AN = CM$.

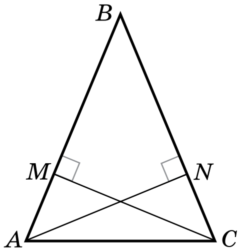
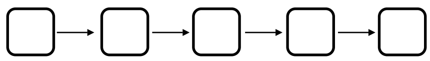


Рис. 1



Утверждение 2. Если в треугольнике равны две медианы (рис. 2), то этот треугольник равнобедренный.

Дано: $\triangle ABC$, AN и CM — медианы треугольника, $AN = CM$.

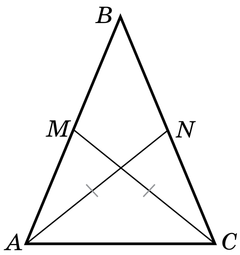
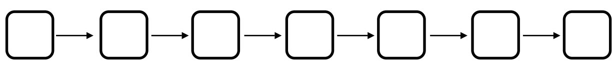


Рис. 2



Задание 3. Задача (теорема) Штейнера–Лемуса.

____
____
____

Доказательство.

1. Пусть в треугольнике ABC биссектрисы AD и CE равны (рис. 3). Биссектриса AD делит угол BAC, равный 2α, на два равных угла. Биссектриса CE делит угол ACB, равный 2β, на два равных угла. Проведем отрезок DF, равный и параллельный AE, так, как показано на рисунке 4. Соединим точку F с точками C и E (рис. 5). Тогда $AEFD$ — параллелограмм и $EF = AD = CE$. Таким образом, треугольник CEF равнобедренный по построению, $\angle EFC = \angle FCE$.

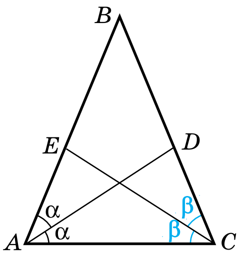


Рис. 3

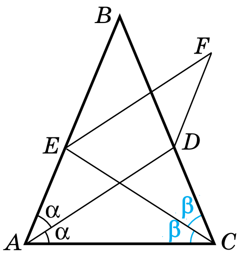


Рис. 4

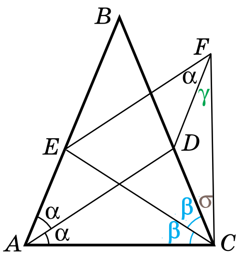


Рис. 5

2. Предположим, что треугольник ABC неравнобедренный, и покажем, что это предположение приведет к противоречию. Пусть

$$\angle DFC = \gamma,\ \angle DCF = \sigma.$$

Тогда из равенства углов EAD и EFD следует, что

$$\alpha + \gamma = \beta + \sigma. \qquad (*)$$

Примем для определенности, что $\alpha > \beta$. Отсюда следует, что

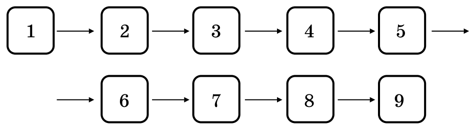
$$CD > EA \text{ и } CD > FD.$$

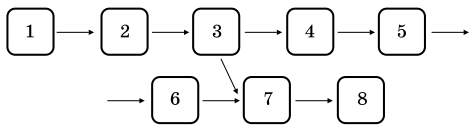
Поэтому, должно быть, $\gamma > \sigma$. Как следствие получаем, что

$$\alpha + \gamma > \beta + \sigma.$$

Последнее неравенство противоречит равенству (*).

Задание 4. Составьте блок-схему доказательства теоремы Штейнера–Лемуса.

а) 

б) 

Решение задач

Далее учащиеся работают по рабочим листам.

Учитель. Прочитайте историческую справку задачи Штейнера–Лемуса, а затем ответьте на вопросы:

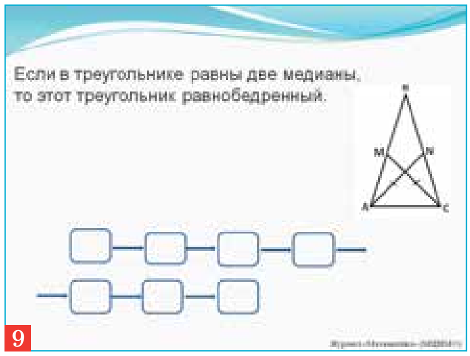
– В честь кого задача получила такое название?

– Почему она вызывает интерес у математиков несколько столетий?

Запишите в рабочий лист (задание 1) известные вам приемы доказательства утверждений.

[Прямое доказательство, обратное доказательство, от противного, с помощью дополнительного построения, метод математической индукции.]

Учитель. Рассмотрим еще три свойства равнобедренного треугольника и устно проведем их доказательство. 6



Свойства

1. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.
2. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.
3. В равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны.

Учитель. Что общего в доказательстве рассмотренных утверждений? Рассмотрим блок-схему доказательства:

Условие → Равенство треугольников → Равенство соответствующих элементов → Заключение

Несколько учащихся, по желанию, устно доказывают свойства у доски.

Учитель. Сформулируйте обратные утверждения свойствам и докажите первые два, записав решение в виде блок-схемы (см. рабочий лист, задание 2). 7

После устного обсуждения первого обратного утверждения учитель предлагает готовый вариант блок-схемы. 8

После обсуждения второго обратного утверждения, учащиеся самостоятельно записывают доказательство в виде блок-схемы. 9

Проверку полученных блок-схем учитель проверяет с помощью документ-камеры.

Учитель. Как вы думаете, сохранится ли верность высказывания, если слово «высота» или «медиана», в рассмотренных нами утверждениях, заменить на слово «биссектриса»? Сформулируйте получившееся утверждение.

[Если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник является равнобедренным.]

Именно так и звучит формулировка задачи Штейнера–Лемуса. Запишите ее в рабочих листах (см. рабочий лист, задание 3). 10

В задании 3 предложено одно из доказательств задачи. 11

Учащиеся, работая в парах, знакомятся с решением и составляют к нему блок-схему, дополняя ее теоретическими обоснованиями. Слабоуспевающим учащимся предлагается карточка-подсказка с заполненной блок-схемой, в которую нужно внести только ссылки на теоретические факты.

По окончании работы осуществляется проверка через документ-камеру. В рассмотрение берутся несколько вариантов выполненной работы. Учащимся предлагается сравнить, проанализировать выполненное задание, сделать коррекцию своей работы, провести взаимооценку и самооценку. Учитель предлагает верный вариант блок-схемы и подводит итог этого этапа урока.

Учитель. Какие методы доказательства используются в рассмотренном способе?

[Дополнительное построение, прямое доказательство, доказательство от противного.]

Учитель. Применение нескольких приемов доказательства утверждения можно назвать комбинированным способом.

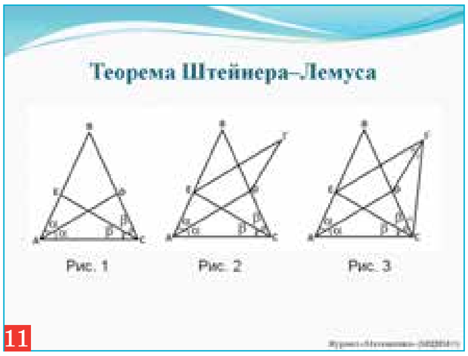
Процесс исследования будет продолжен на следующих уроках, и мы познакомимся еще с двумя способами доказательства теоремы (задачи) Штейнера–Лемуса. Это доказательство с помощью теоремы косинусов и формулы для нахождения длины биссектрисы треугольника по его сторонам и с помощью свойств описанной окружности.

Материалы для дальнейшего изучения передаются учащимся в электронном виде.

Подведение итогов урока

Учитель. Что нового вы узнали сегодня на уроке? Отметьте в таблице, формированию каких личностных и общеучебных качеств способствовал урок.

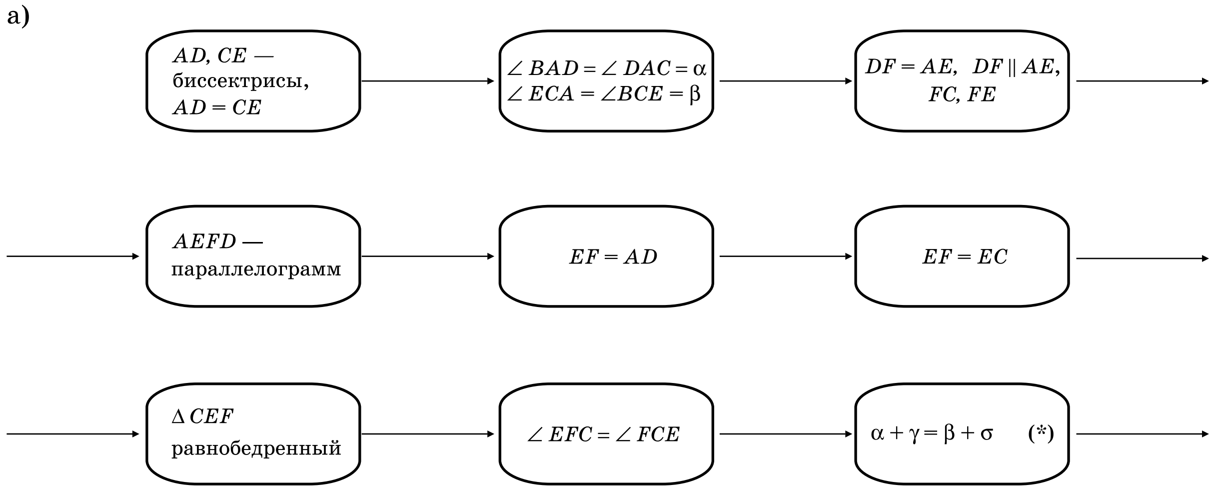
Качества (умения)	
личностные	общеучебные
Наблюдательность Внимательность Активность Упорство Аккуратность Собранность Уверенность Ответственность Память	Рассуждать Доказывать, обосновывать Делать вывод Устанавливать связь между явлениями Самооценка Анализировать Сотрудничать Применять теоретические знания на практике Пользоваться справочной литературой



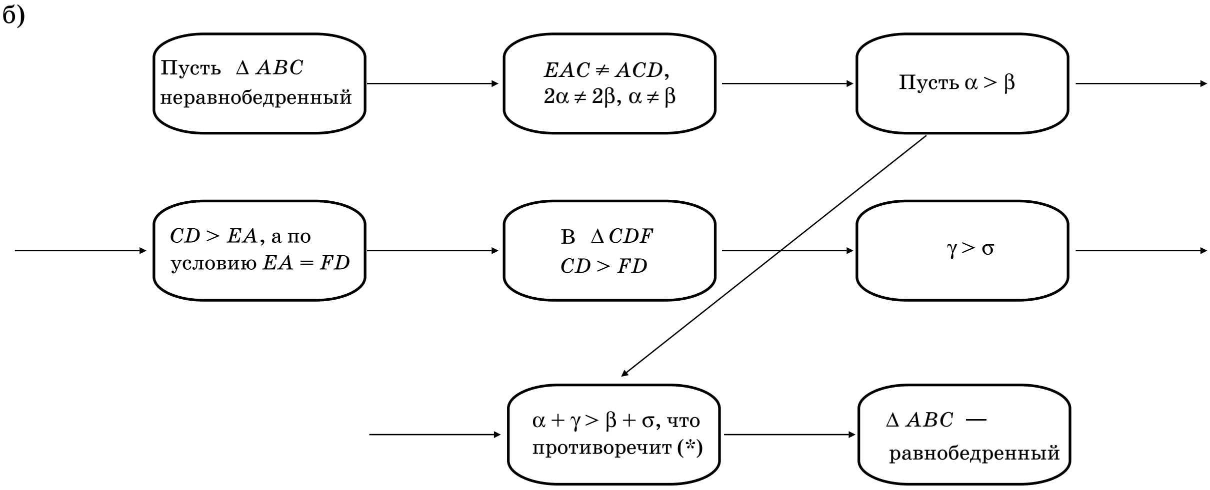
Карточка-подсказка

Заполните блок-схему, дополнив ее необходимыми теоретическими обоснованиями.

а)



б)



Литература

1. *Вольфсон Б.И., Резницкий Л.И.* Геометрия. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9. Учимся решать задачи и повторяем теорию: учебное пособие. — Р/Д.: Легион, 2013.
2. *Березин В.Н., Березина Л.Ю., Никольская И.Л.* Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1985.
3. ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Штейнера_-_Лемуса.
4. math4school.ru/teorema_shtejnera_lemusa.html.

ЕГЭ. ЗАДАНИЕ 11

А. ШЕВКИН,
г. Москва

Проценты

Будем надеяться, что ученики уже обучены решать задачу «Найти число b, составляющее $p\%$ числа a» и две обратные задачи, приводящие к нахождению a и p из равенства $b=\frac{a\cdot p}{100}$.

Рассмотрим решения более сложных задач на проценты, требующих сравнения чисел в процентах. Приведем решения таких задач, указывая год выпуска сборника вариантов для подготовки к ЕГЭ, из которого взята задача.

Заметим, что при решении задач на проценты лучше обходиться без пропорций, в чем можно убедиться, решив рассмотренные ниже задачи с помощью пропорций.

Начнем с задачи на «сухое вещество», чтобы повторить проценты.

1. (2018) Виноград содержит 90% влаги, изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 98 кг изюма?

Решение. Способ I.

1) 100% – 5% = 95% — сухого вещества в изюме;
2) $98\cdot 0{,}95=93{,}1$ кг — сухого вещества в 98 кг изюма;
3) 100% – 90% = 10% — сухого вещества в винограде;
4) $93{,}1:0{,}1=931$ кг — масса винограда.

Способ II. Пусть надо взять x кг винограда.

Виноград содержит сухого вещества
100% – 90% = 10%, то есть $0{,}1x$ кг.
Изюм содержит сухого вещества
100% – 5% = 95%, то есть $0{,}95\cdot 98=93{,}1$ кг.
Составим уравнение

$$0{,}1x=93{,}1.$$

Его единственный корень $x=931$.

Ответ: 931 кг.

2. Число увеличили на 10%, полученное число еще раз увеличили на 10%. На сколько процентов увеличилось первоначальное число за два раза?

Решение. Пусть a — первоначальное число, тогда:

$$a+\frac{10}{100}\cdot a=\left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot a=1{,}1a$$

— второе число,

$$1{,}1a+\frac{10}{100}\cdot 1{,}1a=\left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot 1{,}1a=1{,}1^2a=a+0{,}21a$$

— третье число, оно больше a на 21%.

Ответ: на 21%.

Здесь и далее неизвестное число, от которого находят проценты, будем обозначать буквой. Обобщим полученный результат:

1. Чтобы увеличить число на $p\%$, надо это число умножить на $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

2. Аналогично показывается, что для уменьшения числа на $p\%$, надо это число умножить на $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

3. (2019) Одиннадцать одинаковых рубашек дешевле куртки на 1%. На сколько процентов четырнадцать таких же рубашек дороже куртки?

Решение. Пусть r — цена рубашки, k — цена куртки в рублях. Тогда верны равенства:

$$11r = k - 0{,}01k,\ 11r = 0{,}99k,\ r = 0{,}09k;$$
$$14r = 1{,}26k.$$

Последнее равенство означает, что 14 рубашек стоят $k + 0{,}26k$, то есть дороже куртки на 26%.

Ответ: на 26%.

4. (2019) Восемь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

Решение. Используя те же обозначения, получим верные равенства:

$$8r = 0{,}98k,\ 4r = 0{,}49k;$$
$$12r = 1{,}47k.$$

То есть двенадцать рубашек дороже куртки на 47%.

Ответ: на 47%.

5. (2017) Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?

Решение. Выпишем в строчку одинаковые по стоимости массы ягод:

Черешня	Вишня	Клубника
3	5	
	3	2
9	15	10

1 кг клубники стоит столько же, сколько стоит 0,9 кг черешни, то есть на 10% дешевле, чем 1 кг черешни.

Ответ: на 10%.

6. (2019) Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Решение. Пусть брюки стоят b, рубашка r, пиджак p (в рублях). По условию задачи,

$$b = r + 0{,}3r = p - 0{,}22p,$$

откуда следует, что $r = 0{,}6p$ или $r = p - 0{,}4p$. Следовательно, рубашка дешевле пиджака на 40%.

Ответ: на 40%.

7. Зарплату сотрудника увеличили на несколько процентов. Через некоторое время эту новую зарплату подняли на столько процентов, на сколько увеличили в первый раз. На сколько процентов увеличили зарплату в первый раз, если за два раза она увеличилась на 44%?

Решение. Пусть a — первоначальная зарплата и ее увеличили в первый раз на p%. После первого повышения зарплата была равна $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot a$. Эту зарплату увеличили на p%, поэтому третья зарплата стала равной $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot a$, что, по условию задачи, равно $1{,}44a$. Тогда верно равенство

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot a = 1{,}44a.$$

Разделив обе его части на a ($a \neq 0$), получим:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}44.$$

Так как

$$1+\frac{p}{100} > 0,$$

то

$$1+\frac{p}{100} = 1{,}2,\ p = 20.$$

Следовательно, в первый раз зарплату увеличили на 20%.

Ответ: на 20%.

8. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

Решение. Пусть a — цена каждой акции при открытии торгов в четверг (все цены в рублях). Пусть после торгов в четверг цена акции увеличилась на p% и составила $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot a$. После торгов в пятницу цена акции уменьшилась на p% и стала равна

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot a = \left(1-\left(\frac{p}{100}\right)^2\right)\cdot a.$$

В результате она стала стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг, то есть $0{,}91a$. Тогда верно равенство

$$\left(1-\left(\frac{p}{100}\right)^2\right)\cdot a = 0{,}91a.$$

Перепишем его в виде

$$1-\left(\frac{p}{100}\right)^2 = 0{,}91.$$

Так как

$$\frac{p}{100} > 0,$$

то

$$\frac{p}{100} = 0{,}3,\ p = 30.$$

Следовательно, в четверг акции компании подорожали на 30%.

Ответ: на 30%.

9. (2018) Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась в 2 раза, то общий доход семьи вырос бы на 65%. Если бы стипендия дочери уменьшилась в 2 раза, то общий доход семьи сократился бы на 1%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение. Обозначим доходы мужа, жены и дочери m, g и d соответственно. Имеем:

$$m = 0{,}65(m + g + d), \qquad (1)$$

$$0{,}5d = 0{,}01(m + g + d). \qquad (2)$$

Обе части равенства (2) не нули. Разделив равенство (1) на равенство (2), получим:

$$m : 0{,}5d = 65,$$

откуда следует, что $m = 32{,}5d$. Умножив равенство (2) на 2 и подставив в полученное равенство $32{,}5d$ вместо m, получим равенство

$$d = 0{,}02(32{,}5d + g + d). \qquad (3)$$

Выразив g через d из равенства (3), получим:

$$g = 16{,}5d.$$

Тогда доход семьи равен

$$m + g + d = 50d,$$

а зарплата жены от общего дохода составляет

$$\frac{g \cdot 100\%}{m+g+d} = \frac{16{,}5d \cdot 100\%}{50d} = 33\%.$$

Ответ: 33%.

Задачи для самостоятельного решения

1. (2019) Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 4%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

2. (2019) Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 7%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

3. Брюки дороже рубашки на 20% и дешевле пиджака на 46%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

4. В понедельник цена акции увеличилась на 20%, во вторник она увеличилась еще на 30%. На сколько процентов за эти два дня увеличилась цена акции?

5. (2017) В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 49% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

6. Брюки дороже рубашки на 25% и дешевле пиджака на 20%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

7. В магазине костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 20% дороже, чем такой же костюм на рынке, причем брюки стоят на 30% дороже, чем на рынке, а пиджак — на 15%. Во сколько раз на рынке брюки от этого костюма дешевле пиджака?

Ответы: **1.** На 44%. **2.** На 24%. **3.** На 55%. **4.** На 56%. **5.** На 70%. **6.** На 36%. **7.** В 2 раза.

Сплавы и смеси

При решении задач на сплавы и смеси считают, что сумма масс сплавляемых веществ равна массе получаемого сплава, а сумма масс одного вещества, входящего в разные сплавы, равна массе этого вещества в полученном сплаве. Аналогичное допущение принимаем и для сумм масс (объемов) при смешивании жидкостей.

Рассмотрим подготовительную задачу.

1. Имеется уксусный раствор массой 1,5 кг, содержащий 40% уксуса. Сколько килограммов воды нужно добавить в раствор, чтобы новый раствор содержал 10% уксуса?

Решение. Как получена концентрация в первом и втором растворах? Массу уксуса m поделили на массу раствора и умножили на 100% (M — новая масса раствора). Сравним результаты:

$$\frac{m \cdot 100\%}{1{,}5} = 40\% \text{ и } \frac{m \cdot 100\%}{M} = 10\%.$$

Второй результат в 4 раза меньше, значит, M в 4 раза больше, чем 1,5.

Дальше можно решать по-разному.

Способ I.

1) 40 : 10 = 4 раза — во столько раз уменьшилась концентрация уксуса в растворе и увеличилась масса раствора;

2) $1{,}5 \cdot 4 = 6$ кг — масса нового раствора;

3) $6 - 1{,}5 = 4{,}5$ кг — воды надо добавить.

Способ II.

1) $0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}6$ кг — масса уксуса в первом растворе.

2) Пусть добавили x кг воды. Составим уравнение

$$0{,}1 \cdot (1{,}5 + x) = 0{,}6.$$

Его единственный корень $x = 4{,}5$. Значит, надо добавить 4,5 кг воды.

Ответ: 4,5 кг.

Рассмотрим решения задач на смеси и сплавы из сборников вариантов для подготовки к ЕГЭ.

2. (2017) В сосуд, содержащий 7 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Определите процентную концентрацию того же вещества в новом растворе.

Решение. Способ I. В 7 л раствора содержится $0{,}15 \cdot 7 = 1{,}05$ л вещества. Этот объем от $7 + 8 = 15$ л составляет

$$\frac{1{,}05 \cdot 100\%}{15} = 7\%.$$

Способ II. Объем вещества не изменился. Во сколько раз увеличился объем раствора, во столько раз уменьшилась концентрация вещества в нем.

1) $(7+8):7=\frac{15}{7}$ раз — во столько раз увеличился объем раствора;

2) $15:\frac{15}{7}=7$ (%) — новая концентрация вещества в растворе.

Ответ: 7%.

3. (2018) Имеется два сплава. Первый содержит 25% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 28% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Решение. Пусть масса первого сплава x кг, второго $(150-x)$ кг, третьего — 150 кг. Найдем массу никеля в каждом из трех сплавов: в первом сплаве было $0,25x$ кг никеля, во втором — $0,3(150-x)$ кг, в третьем — $0,28 \cdot 150 = 42$ кг.

Составим уравнение

$$0,25x + 0,3(150-x) = 42.$$

Решив полученное уравнение, получим: $x = 60$.

Теперь ответим на вопрос задачи. Масса первого сплава 60 кг, масса второго сплава 90 кг; первая масса меньше второй на 30 кг.

Ответ: на 30 кг.

4. (2019) Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого сплава на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

Решение. Пусть масса первого сплава x кг, второго — $(x+7)$ кг, третьего — $(2x+7)$ кг.

В первом сплаве было $0,05x$ кг меди, во втором — $0,14(x+7)$ кг, в третьем — $0,1(2x+7)$ кг.

Составим уравнение

$$0,05x + 0,14(x+7) = 0,1(2x+7).$$

Решив полученное уравнение, получим $x = 28$. При $x = 28$ масса третьего сплава равна 63 кг.

Ответ: 63 кг.

5. (2017) Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора кислоты использовали для получения смеси?

Решение. Пусть масса первого раствора x кг, второго y кг. Приравняв массы кислоты до смешивания и после смешивания, составим два уравнения:

$$0,7x + 0,6y = 0,5(x+y+2),$$
$$0,7x + 0,6y + 0,9 \cdot 2 = 0,7(x+y+2).$$

Решив систему этих двух уравнений, получим ее единственное решение: $x = 3$, $y = 4$. Значит, было 3 кг 70%-го раствора кислоты.

Ответ: 3 кг.

6. (2017) Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй — 50 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 28% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Решение. Пусть в первом сосуде содержится x% кислоты, а во втором — y%. Составим первое уравнение:

$$\frac{x}{100} \cdot 100 + \frac{y}{100} \cdot 50 = 0,28 \cdot (100+50),$$

$$x + 0,5y = 42. \qquad (1)$$

Для второго смешивания возьмем 1 кг первого раствора и 1 кг второго, получим 2 кг смеси. Составим первое уравнение:

$$\frac{x}{100} \cdot 1 + \frac{y}{100} \cdot 1 = 0,36 \cdot 2, \qquad x + y = 72. \qquad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), получим единственное решение: $x = 12$, $y = 60$. В первом сосуде содержится $\frac{x}{100} \cdot 100 = 12$ кг кислоты.

Ответ: 12 кг.

Задачи для самостоятельного решения

1. Имеется 400 г морской воды, содержащей 4% соли. Сколько граммов чистой воды нужно добавить в эту морскую воду, чтобы новый раствор содержал 2% соли?

2. (2016) В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Определите процентную концентрацию того же вещества в новом растворе.

3. (2009) В бидон налили 4 литра молока трехпроцентной жирности и 6 литров молока шестипроцентной жирности. Сколько процентов составляет жирность молока в бидоне?

4. (2017) Имеется два сплава. Первый содержит 5% никеля, второй — 20% никеля. Из этих двух сплавов получили третий массой 225 кг, содержащий 15% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

5. (2017) Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого сплава на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

Ответы: **1.** 400 г. **2.** 16%. **3.** 4,8%. **4.** На 75 кг. **5.** 6 кг.

Совместная работа

Рассмотрим две простые задачи на совместную работу с двумя участниками. Это задачи двух типов. В первой время совместной работы неизвестно, а во второй известно. Начнём с первой задачи.

1. Валя пропалывает грядку за 40 минут, а Галя — за 10 минут. За сколько минут Валя и Галя пропалывают грядку при совместной работе?

Решение. Способ I. Примем всю работу за 1.

1) $1:40=\frac{1}{40}$ грядки — пропалывает за минуту Валя;

2) $1:10=\frac{1}{10}$ грядки — пропалывает за минуту Галя;

3) $\frac{1}{40}+\frac{1}{10}=\frac{1}{8}$ грядки — пропалывают за минуту Валя и Галя при совместной работе;

4) $1:\frac{1}{8}=8$ мин — время прополки одной грядки при совместной работе Вали и Гали.

Способ II. Предположим, что Валя и Галя работали совместно 40 минут. За это время Валя прополола одну грядку.

1) 40 : 10 = 4 грядки — прополола Галя;

2) 1 + 4 = 5 грядок — пропололи за 40 минут Валя и Галя при совместной работе;

3) 40 : 5 = 8 мин — время прополки одной грядки при совместной работе Вали и Гали.

Способ III. Предположим, грядка была длиной 40 м, тогда:

Валя пропалывает 40 : 40 = 1 м/мин,

Галя — 40 : 10 = 4 м/мин,

Валя и Галя при совместной работе пропалывают 1 + 4 = 5 м/мин.

Вдвоем они прополют грядку за 40 : 5 = 8 мин.

Ответ: за 8 минут.

Замечание. Первый способ дает нам полное решение, не зависящее от времени работы или длины грядки. Второй и третий способы решения даны для частных случаев (можно было взять другое время работы или другую длину грядки). Полное решение получится, если мы докажем, что ответ не зависит от выбора дополнительного условия. Так как на экзамене нужно указать лишь правильный ответ, то второй и третий способы вполне можно применять. Чтобы обосновать третий способ решения, можно обозначить объем работы (длину грядки) буквой и фактически повторить первый способ решения.

2. (2018) Валя и Галя пропалывают грядку за восемь минут, а одна Галя — за 10 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Валя?

Решение. Способ I. Примем всю работу за 1.

1) $1:8=\frac{1}{8}$ грядки — пропалывают за минуту Валя и Галя при совместной работе;

2) $1:10=\frac{1}{10}$ грядки — пропалывает за минуту Галя;

3) $\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$ грядки — пропалывает за минуту Валя;

4) $1:\frac{1}{40}=40$ мин — время, за которое Валя пропалывает грядку.

Способ II. Предположим, что Валя и Галя работали совместно 40 минут.

1) 40 : 8 = 5 грядок — они пропололи вдвоем за это время;

2) 40 : 10 = 4 грядки — пропалывает за 40 минут Галя;

3) 5 – 4 = 1 грядку — пропалывает за 40 минут Валя.

Значит, одна Валя пропалывает грядку за 40 минут.

Способ III. Предположим, грядка была длиной 40 м, тогда

Валя и Галя при совместной работе пропалывали 40 : 8 = 5 м/мин,

одна Галя — 40 : 10 = 4 м/мин,

одна Валя пропалывала 5 – 4 = 1 м/мин,

на всю грядку Вале требуется 40 : 1 = 40 мин.

Ответ: за 40 мин.

3. Через первый кран бассейн наполнится за 40 минут, через второй — за 60 минут, через третий — за 48 минут. За сколько минут три крана заполнят бассейн при совместной работе?

Решение. Примем всю работу за 1.

1) $1:40=\frac{1}{40}$ бассейна — наполняет первая за 1 мин;

2) $1:60=\frac{1}{60}$ бассейна — вторая за 1 мин;

3) $1:48=\frac{1}{48}$ бассейна — третья за 1 мин;

4) $\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{48}=\frac{1}{16}$ бассейна — наполняют три трубы за 1 мин при совместной работе;

5) $1:\frac{1}{16}=16$ мин — время, за которое три трубы наполнят бассейн при совместной работе.

Ответ: за 16 минут.

4. (2018) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 ч. Через 5 ч после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ?

Решение. Способ I. Примем всю работу за 1.

1) $1:15=\frac{1}{15}$ заказа — выполняет каждый рабочий за 1 ч;

2) $2\cdot\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$ заказа — выполняют два рабочих за 1 ч совместной работы;

3) $\frac{1}{15}\cdot 5=\frac{1}{3}$ заказа — выполнил каждый рабочий за 5 ч;

4) $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ заказа — выполнили два рабочих при совместной работе;

5) $\frac{2}{3}:\frac{2}{15}=5$ ч — работали два рабочих при совместной работе;

6) 5 + 5 = 10 ч — время выполнения всего заказа.

Способ II. Пусть надо обточить 30 деталей.

1) 30 : 15 = 2 детали — обтачивает каждый рабочий за 1 ч;

2) 2 + 2 = 4 детали — обтачивают два рабочих за 1 ч совместной работы;

3) 2 • 5 = 10 деталей — обточил каждый рабочий за 5 ч;

4) 30 – 10 = 20 деталей — обточили два рабочих при совместной работе;

5) 20 : 4 = 5 ч — работали два рабочих вместе;

6) 5 + 5 = 10 ч — время выполнения всего заказа.

Ответ: за 10 ч.

5. (2018) Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 12 рабочих, во второй — 21 рабочий. Через 10 дней после начала работы в первую бригаду перешли 12 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Для решения задач, где все работники имеют одинаковую производительность труда, удобно применять единицу измерения объема работы «человеко-день». Например, 10 человеко-дней — это объем работы, который может выполнить 1 человек за 10 дней, или 5 человек за 2 дня, или 2 человека за 5 дней.

Решение. Способ I. Примем всю работу за 1.

1) 12 • 10 = 120 чел.-дней — объем работы, выполненной 12 рабочими первой бригады за 10 дней;

2) 21 • 10 = 210 чел.-дней — объем работы, выполненной 21 рабочим второй бригады за 10 дней;

3) 210 – 120 = 90 чел.-дней — объем работы второй бригады, который предстоит компенсировать первой бригаде после перехода 12 рабочих;

4) 12 + 12 – (21 – 12) = 15 человек — на столько рабочих стало в первой бригаде больше;

5) 90 : 15 = 6 дней — потребуется первой бригаде, чтобы наверстать отставание в объеме работы;

6) 10 + 6 = 16 дней — время выполнения двух заказов.

Способ II. Пусть после перехода 12 рабочих бригады работали еще x дней. Приравняем объемы выполненной работы (в человеко-днях) двух бригад за все время работы:

$$12\cdot 10+(12+12)x=21\cdot 10+(21-12)x.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = 6$, поэтому время выполнения двух заказов равно 10 + 6 = 16 дней.

Ответ: 16 дней.

Замечание. Можно обойтись без человеко-дней. Пусть каждый рабочий выполняет за 1 ч y единиц работы (обтачивают y деталей и т.п.). Приравняем объёмы работы бригад:

$$12\cdot 10y+(12+12)xy=21\cdot 10y+(21-12)xy.$$

Разделив на число y, отличное от нуля, получим то же уравнение, что и при втором способе.

6. (2018) Игорь и Паша покрасят забор за 12 часов. Паша и Володя покрасят такой забор за 15 часов, а Володя и Игорь — за 20 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Решение. Способ I. Примем всю работу за 1.

1) $1:12=\frac{1}{12}$ забора — красят за 1 ч Игорь и Паша;

2) $1:15=\frac{1}{15}$ забора — красят за 1 ч Паша и Володя;

3) $1:20=\frac{1}{20}$ забора — красят за 1 ч Володя и Игорь;

4) $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$ забора — красят за 1 ч два Игоря, два Паши и два Володи;

5) $\frac{1}{5}:2=\frac{1}{10}$ забора — красят за 1 ч Игорь, Паша и Володя, работая втроем;

6) $1:\frac{1}{10}=10$ ч — время, за которое три мальчика покрасят забор.

Способ II. Предположим, что было два Игоря, два Паши и два Володи (мальчики с одинаковыми именами работают с одинаковой производительностью). Пусть они, работая вшестером, красят забор. За это время Игорь и Паша покрасят 60 : 12 = 5 заборов, Паша и Володя — 60 : 15 = 4 забора, а Володя и Игорь — 3 забора. Шесть мальчиков за 60 ч покрасят 12 заборов;

на 1 забор они тратят 5 ч; три мальчика тратят на забор в 2 раза больше времени — 10 ч.

Ответ: за 10 ч.

В следующей задаче нет совместной работы, но она решается похожим способом.

7. (2018) Костя и Гриша выполняют одинаковый тест. Костя отвечает за час на 12 вопросов, а Гриша — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Костя закончил свой тест позже Гриши на 90 минут. Сколько вопросов содержит тест?

Решение. Способ I.

1) 60 : 12 = 5 мин — тратит на 1 вопрос Костя;

2) 60 : 20 = 3 мин — тратит на 1 вопрос Гриша;

3) 5 – 3 = 2 мин — на каждый вопрос Костя тратит на 2 мин больше, чем Гриша, а всего он потратил на 90 мин больше;

4) 90 : 2 = 45 вопросов — в тесте.

Способ II. Пусть в тесте было x вопросов.

1) 60 : 12 = 5 мин — Костя тратит на один вопрос, значит, $5x$ минут он будет тратить на все вопросы;

2) 60 : 20 = 3 мин — Гриша тратит на один вопрос, значит, $3x$ минут тратит на все вопросы.

Составим уравнение:

$$5x - 3x = 90,\ x = 45.$$

В тесте 45 вопросов.

Ответ: 45.

8. (2009) Два плотника, работая вместе, могут выполнить задание за 36 ч. Производительности труда первого и второго плотников относятся как 3 : 4. Плотники договорились работать поочередно. Какую часть этого задания должен выполнить второй плотник, чтобы все задание было выполнено за 69,3 ч?

Решение. Примем всю работу за 1.

1) $1:36=\frac{1}{36}$ задания — выполняют два плотника за 1 ч при совместной работе.

Далее делим $\frac{1}{36}$ в отношении 3 : 4.

2) $\frac{1}{36}:(3+4)\cdot 3=\frac{1}{84}$ задания — выполняет первый плотник за 1 ч работы;

3) $\frac{1}{36}-\frac{1}{84}=\frac{1}{63}$ задания — выполняет второй за 1 ч работы;

4) $1:\frac{1}{84}=84$ ч — требуется первому плотнику на выполнение всей работы;

5) $1:\frac{1}{63}=63$ ч — требуется второму плотнику на выполнение всей работы.

Пусть первый выполнил часть работы, выражаемую дробью x, тогда второй — часть работы, выражаемую дробью $1 - x$; они затратили $84x$ ч и $63(1 - x)$ ч соответственно при поочередной работе, а всего — 69,3 ч. Составим уравнение

$$84x + 63(1 - x) = 69,3.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = 0,3$. Первый выполнил 0,3 работы, второй — $1 - x = 0,7$,

Ответ: 0,7.

Задачи для самостоятельного решения

1. Малыш может съесть все плюшки за 20 минут, а Карлсон — за 5 минут. За сколько минут они съедят все плюшки вместе?

2. Две бригады при совместной работе выполнят задание за 14 дней. Одна первая бригада могла бы выполнить это задание за 21 день. За сколько дней одна вторая бригада могла бы выполнить это задание?

3. Три трубы заполнили бассейн при совместной работе за 15 минут. Одна первая труба наполнит бассейн за 35 минут, а одна вторая — за 63 минуты. За сколько минут одна третья труба заполнит бассейн?

4. (2018) Коля и Митя выполняют одинаковый тест. Коля отвечает за час на 12 вопросов, а Митя — на 21. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Коля закончил свой тест позже Мити на 105 минут. Сколько вопросов содержит тест?

5. (2009) Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Производительности труда первого и второго каменщиков относятся как 1 : 3. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько часов должен проработать первый, чтобы это задание было выполнено за 20 ч?

6. (2009) Отец с сыном должны вскопать огород. Производительность труда отца в 2 раза больше, чем у сына. Работая вместе, они могут вскопать огород за 4 ч. Однако вместе они проработали только 1 час, потом некоторое время работал один сын, а заканчивал работу уже один отец. Сколько часов в общей сложности проработал в огороде отец, если вся работа была выполнена за 7 часов?

7. (2019) Первый и второй насосы наполняют бассейн за 21 минуту, второй и третий — за 28 минут, первый и третий — за 36 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

8. (2018) Игорь и Паша покрасят забор за 18 часов. Паша и Володя покрасят этот же забор за 24 часа, а Володя и Игорь — за 36 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Ответы: **1.** За 4 мин. **2.** За 42 дня. **3.** За 45 мин. **4.** 49 вопросов. **5.** 6 ч. **6.** 4 ч. **7.** За 18 мин. **8.** За 16 ч.

А. БЛИНКОВ,
г. Москва

КРУЖОК ПО ГЕОМЕТРИИ

Занятие 9. Теорема Паскаля

Для успешного освоения материала этого занятия рекомендуется предварительно повторить теорему Менелая, свойства гомотетии и изогонального сопряжения.

В занятиях по темам «Выход в пространство» и «Полярное соответствие» мы уже сталкивались с элементами проективной геометрии. Одну из теорем, находящуюся на стыке евклидовой и проективной геометрии, — теорему Дезарга мы уже рассматривали. Сегодня — еще одна такая теорема, которая называется *теоремой Паскаля*.

Теорема. Три точки попарного пересечения противолежащих сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

Доказательство. Способ I. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность,

$$M = AB \cap DE,\ P = BC \cap EF,\ N = CD \cap FA$$

(рис. 1). Докажем, что точки M, P и N лежат на одной прямой.

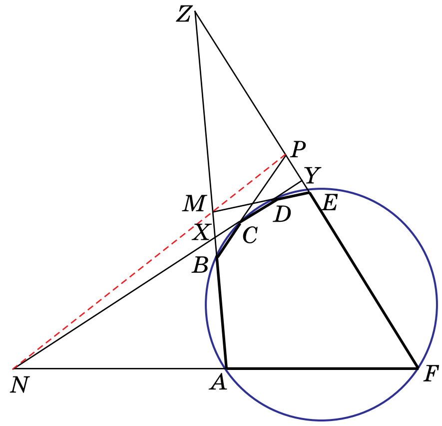


Рис. 1

Рассмотрим точки попарного пересечения сторон, через одну:

$$X = AB \cap CD,\ Y = CD \cap EF,\ Z = EF \cap AB.$$

По теореме о степени точки, получим три равенства, которые удобно записать в векторной форме:

$$\overline{XA}\cdot\overline{XB} = \overline{XC}\cdot\overline{XD},\quad \overline{YC}\cdot\overline{YD} = \overline{YE}\cdot\overline{YF},\quad \overline{ZA}\cdot\overline{ZB} = \overline{ZE}\cdot\overline{ZF}. \qquad (1)$$

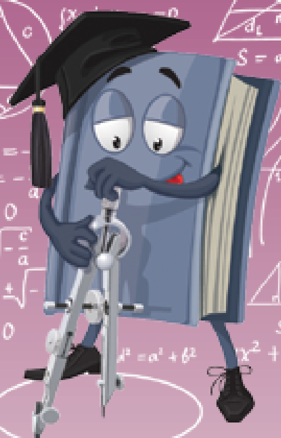
Рассмотрим треугольник XYZ и три прямые, пересекающие его стороны: BC, DE и FA. Применяя в каждом случае теорему Менелая, соответственно получим:

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{BZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{CX}} = -1,\quad \frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZE}}{\overline{EY}}\cdot\frac{\overline{YD}}{\overline{DX}} = -1,\quad \frac{\overline{XA}}{\overline{AZ}}\cdot\frac{\overline{ZF}}{\overline{FY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}} = -1.$$

Перемножим почленно эти равенства и произведем сокращения, учитывая равенства (1):

$$\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}} = -1.$$

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.



Следовательно, точки M, P и N лежат на одной прямой (*коллинеарны*).

Эта прямая называется *прямой Паскаля* для данного вписанного шестиугольника.

Так как теорема Паскаля по своей сути является проективной, то можно сразу предсказать, что произойдет, если в данном шестиугольнике: а) две стороны параллельны; б) две пары сторон параллельны.

Пусть, например, $AB \parallel DE$, то есть M — бесконечно удаленная точка, тогда прямая NP, проходящая через M, будет параллельна этим сторонам. (*Самостоятельно сделайте чертеж.*)

Если же $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$, то M и P — бесконечно удаленные точки, поэтому MP — бесконечно удаленная прямая, а точка N ей принадлежит. Это означает, что $CD \parallel FA$.

Отметим, что утверждение теоремы Паскаля останется верным, если точки A, B, C, D, E и F расположены на окружности произвольным образом, то есть если $ABCDEFA$ — произвольная замкнутая ломаная (возможно, с самопересечениями). Это дает возможность рассмотреть другой способ доказательства теоремы Паскаля.

Способ II. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность,

$$X = AB \cap DE,\ Y = BC \cap EF,\ Z = CD \cap FA$$

(рис. 2) Докажем, что точки X, Z и Y лежат на одной прямой.

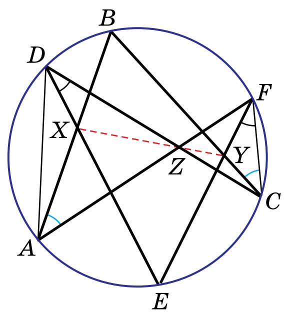


Рис. 2

Треугольники AZD и CZF подобны. Кроме того,

$$\angle XAZ = \angle YCF,\ \angle XDZ = \angle YFC.$$

Рассмотрим преобразование подобия, переводящее треугольник AZD в треугольник CZF. Образом точки X будет такая точка X', что

$$\angle X'CZ = \angle XAZ = \angle YCF,$$
$$\angle X'FZ = \angle XDZ = \angle YFC.$$

Следовательно, точка X' изогонально сопряжена точке Y относительно треугольника CZF. Тогда

$$\angle FZY = \angle CZX' = \angle AZX,$$

то есть точки X, Z и Y лежат на одной прямой.

Комментарий. Более того, теорема Паскаля в этом общем случае верна не только для точек, лежащих на окружности, но и для шести точек, принадлежащих любому коническому сечению!

Отметим также, что если на таком чертеже обозначить точки так, чтобы вписанный шестиугольник $ABCDEF$ был выпуклым, то получим ***следствие***: три точки попарного пересечения его диагоналей лежат на одной прямой (рис. 3).

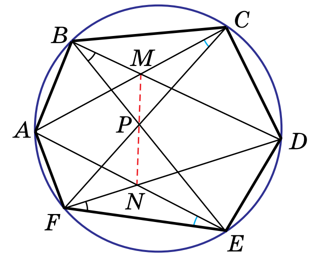


Рис. 3

Комментарий. Отметим также, что справедлива и теорема, *обратная теореме Паскаля*, которая уже целиком относится к проективной геометрии:

Если три пары противолежащих сторон шестиугольника пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то вершины шестиугольника принадлежат некоторому коническому сечению.

В качестве примера применения теоремы Паскаля рассмотрим ее неожиданную связь с *леммой о сегменте* и одним из *свойств полувписанной окружности* (окружности, которая касается двух сторон треугольника и его описанной окружности).

Пример. Полувписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и BC в точках K и L, а описанной окружности — в точке T. Докажите, что центр вписанной окружности I — середина отрезка KL.

Решение. Рисунок 4. По лемме о сегменте, прямые TL и TK вторично пересекают окружность в точках A' и B' — серединах дуг BC и AC. Значит, AA' и BB' — биссектрисы треугольника, поэтому они пересекаются в точке I. По теореме Паскаля, для ломаной $CAA'TB'B$ получим, что точки K, I и L лежат на одной прямой. Так как треугольник KCL равнобедренный, то его биссектриса CI является также и медианой, что и требовалось.

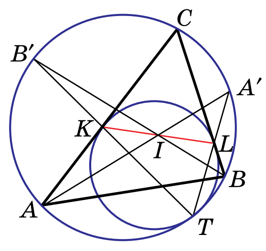


Рис. 4

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте еще одну точку этой окружности.

2. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$.

а) Через произвольную точку X проведены прямые AX и DX, пересекающие прямые CD и AB в точках E и F соответственно и вторично пересекающие окружность в точках M и N соответственно. Докажите, что прямые EF, MN и BC пересекаются в одной точке или параллельны.

б) Точка X такова, что

$$\angle BAX = \angle CDX = 90°.$$

Докажите, что точка P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой XO.

3. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, R и r — радиусы этих окружностей, J — точка, симметричная вершине прямого угла относительно I. Найдите OJ.

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Полувписанные окружности треугольников ACD и BCD, касающиеся сторон AD и BD соответственно, касаются стороны CD в одной и той же точке X. Докажите, что центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на перпендикуляре, опущенном из точки X на AB.

5. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

6. Даны треугольник ABC и некоторая точка T. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка X пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

7. Точки A и A_1, лежащие внутри окружности с центром O, симметричны относительно точки O. Точки P, P_1, Q и Q_1 лежат на окружности, причем сонаправлены лучи AP и A_1P_1 и лучи AQ и A_1Q_1. Докажите, что точка пересечения прямых P_1Q и PQ_1 лежит на прямой AA_1.

8. Точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, P — произвольная точка. Прямые AP, BP и CP пересекают окружность в точках A', B' и C' соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых MA' и BC, MB' и CA, MC' и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку P.

Решения задач

1. Пусть A, B, C, D и E — данные точки, тогда построение непосредственно следует из теоремы Паскаля. Действительно, построим точку $M = AB \cap DE$ и проведем через точку E произвольную прямую x, пересекающую BC в точке P (см. рис. 1). Пусть $N = CD \cap MP$, тогда точка F пересечения NA и прямой x — искомая. Для доказательства достаточно рассмотреть точку F' пересечения окружности и прямой x. Она должна лежать на NA, то есть совпадать с точкой F.

Комментарий. Отметим, что способ построения не изменится, если в условии задачи заменить окружность на эллипс, параболу или гиперболу.

2. а) Пусть $K = BC \cap MN$ (рис. 5), тогда, применяя теорему Паскаля к точкам A, M, N, D, C и B, получим, что точки

$$E = AM \cap DC,$$
$$K = BC \cap MN, \quad F = ND \cap BA$$

лежат на одной прямой (возможно, и бесконечно удаленной).

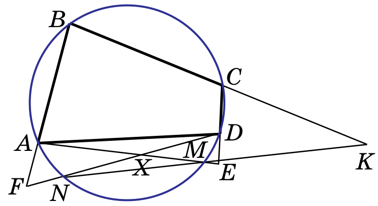


Рис. 5

б) Пусть точки B_1 и C_1 симметричны точкам B и C относительно точки O (рис. 6). Тогда точка X лежит на прямых AB_1 и C_1D. Применим теорему Паскаля к шестиугольнику AB_1BDC_1C. Прямые AB_1 и DC_1 пересекаются в точке X, прямые BB_1 и CC_1 — в точке O, прямые BD и AC — в точке P. Следовательно, точки X, O и P лежат на одной прямой.

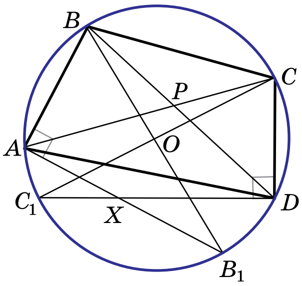


Рис. 6

3. $R - 2r$.

Пусть ABC — данный треугольник с прямым углом C (рис. 7).

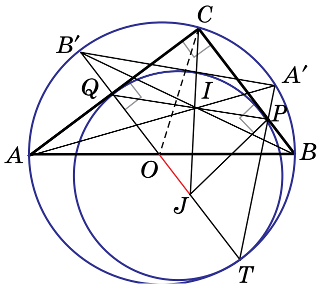


Рис. 7

Способ I. По формуле Эйлера:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Так как OI — медиана треугольника COJ, то

$$4OI^2 + CJ^2 = 2(OC^2 + OJ^2).$$

Следовательно,

$$4R^2 - 8Rr + \left(2r\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2 + 2OJ^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow OJ^2 = (R - 2r)^2.$$

Так как $R > 2r$, то

$$OJ = R - 2r.$$

Способ II. Рассмотрим полувписанную окружность, касающуюся катетов BC и AC в точках P и Q, а описанной около ABC окружности — в точке T. Докажем, что J — ее центр. Действительно, по теореме Паскаля, для ломаной $CAA'TBB'$ получим, что I — середина PQ (*см. пример*). Кроме того, так как при гомотетии с центром T одна из окружностей переходит в другую, $PQ \parallel A'B'$. Далее заметим, что в четырехугольнике $CPJQ$ три прямых угла и перпендикулярны диагонали, значит, он является квадратом, тогда

$$JP = JQ = 2r.$$

Это и означает, что точка J — центр построенной окружности. Следовательно, J лежит на отрезке OT, поэтому

$$OJ = OT - JT = R - 2r.$$

4. Пусть I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, K и N — их проекции на прямую AB, Y — проекция на AB точки X (рис. 8).

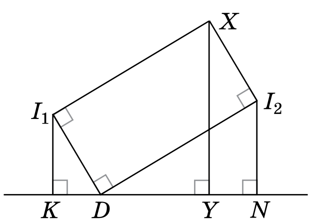


Рис. 8

Применив для заданных полувписанных окружностей лемму, доказанную в примере, получим, что

$$XI_1 \perp DI_1 \text{ и } XI_2 \perp DI_2.$$

Так как $DI_1 \perp DI_2$, то DI_1XI_2 — прямоугольник. Тогда $KY = DN$, откуда следует, что Y — проекция на AB центра окружности, вписанной в треугольник ABC (см. занятие 9-го класса «Три окружности в треугольнике»).

5. Пусть (рис. 9 и 10)

$$AE \cap OC = M,\ DE \cap BC = N.$$

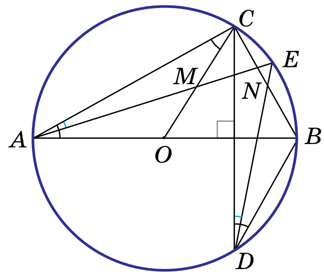


Рис. 9

Способ I. Рассмотрим равнобедренные треугольники AOC и DBC (см. рис. 9):

$$\angle OCA = \angle CAB = \angle CDB = \angle BCD.$$

Значит, эти треугольники подобны, следовательно,

$$\frac{|OC|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|DC|}.$$

Кроме того, подобны и треугольники CAM и CDN (так как $\angle CAE = \angle CDE$), поэтому,

$$\frac{|CM|}{|CN|} = \frac{|AC|}{|DC|}.$$

Таким образом,

$$\frac{|CN|}{|CB|} = \frac{|CM|}{|CO|} = \frac{1}{2}.$$

Способ II. Пусть луч CO пересекает окружность в точке F, тогда $\angle CDF = 90°$, то есть $FD \parallel AB$ (см. рис. 10).

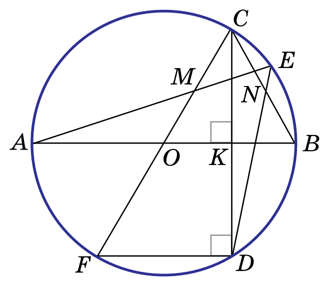


Рис. 10

По теореме Паскаля, для вписанного шестиугольника $ABCFDE$ точки Q, N и M пересечения AB и FD, BC и DE, CF и EA соответственно лежат на одной прямой, причем точка Q — бесконечно удаленная. Значит, $MN \parallel AB$, поэтому N — середина BC.

6. Так как углы APT, ART, AST и AQT прямые, то точки P, R, S и Q лежат на окружности, построенной на отрезке AT как на диаметре (рис. 11).

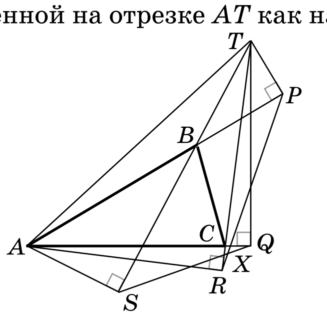


Рис. 11

Применим теорему Паскаля к шестиугольнику $AQSTRP$. Прямые AQ и TR пересекаются в точке C, прямые QS и RP — в точке X, прямые ST и PA — в точке B. Следовательно, точки B, C и X лежат на одной прямой.

7. Пусть лучи PA и QA пересекают окружность в точках P_2 и Q_2, то есть P_1P_2 и Q_1Q_2 — диаметры данной окружности (рис. 12).

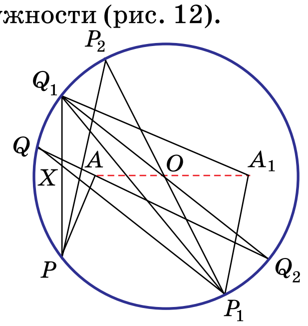


Рис. 12

Применим теорему Паскаля к шестиугольнику $PP_2P_1QQ_2Q_1$. Прямые PP_2 и QQ_2 пересекаются в точке A, а прямые P_1P_2 и Q_1Q_2 пересекаются в точке O, поэтому точка X пересечения прямых P_1Q и Q_1P лежит на прямой AO.

8. Пусть D, E и F соответственно — указанные точки пересечения прямых (рис. 13). Применим теорему Паскаля к точкам M, A', A, C, B и B', тогда точки D, P и E лежат на одной прямой. Аналогично, применяя теорему Паскаля к точкам M, C', C, A, B и B', получим, что точки F, P и E лежат на одной прямой. Следовательно, точки D, E и F лежат на прямой, проходящей через точку P.

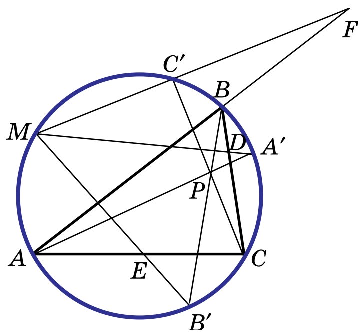


Рис. 13

Занятие 10. Теорема Брианшона, ее связь с теоремой Паскаля. Вырожденные случаи теорем Паскаля и Брианшона и сопутствующие факты

Для успешного освоения материала этого занятия рекомендуется предварительно повторить теоремы о радикальной оси двух окружностей и радикальном центре трех окружностей (см. занятие 11 для 9-го класса), основные свойства полярного соответствия и решение задачи 7 из занятия «Выход в пространство».

Рассмотрим еще одну теорему, лежащую на стыке евклидовой и проективной геометрий, которая называется *теоремой Брианшона*.

Теорема. В описанном шестиугольнике три главные диагонали пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ описан около окружности. Обозначим точки касания через R, Q, T, S, P и U (рис. 1).

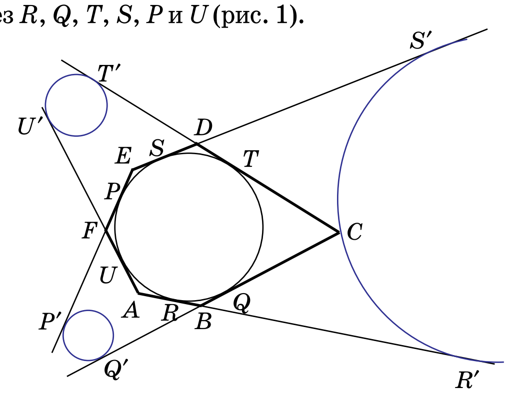


Рис. 1

Выберем произвольное положительное число a и построим на прямых BC и EF точки Q' и P' соответственно так, чтобы

$$PP' = QQ' = a$$

и чтобы построенные точки лежали в одной полуплоскости относительно прямой PQ. Затем построим окружность ω_1, касающуюся выбранных прямых в точках Q' и P'. Аналогичным образом построим еще две пары точек: R' и S', T' и U' (на расстоянии a от точек R и S, T и U соответственно), и две соответствующие им окружности ω_2 и ω_3.

Докажем, что прямая BE является радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2. Действительно,

$$BQ' = QQ' - BQ = RR' - BR = BR',$$

$$EP' = EP + PP' = ES + SS' = ES'.$$

Аналогично доказывается, что CF — радикальная ось окружностей ω_1 и ω_3, а AD — радикальная ось ω_2 и ω_3. Поскольку радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке (если центры этих окружностей не лежат на одной прямой), то прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке (*конкурентны*).

Теорема Брианшона справедлива не только для окружности, но и для любого конического сечения. Справедлива и *теорема, ей обратная,* которая уже целиком относится к проективной геометрии:

Если три диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке, то его стороны касаются некоторого конического сечения.

Вспомним теперь принцип двойственности в геометрии, который вытекает из *полярного соответствия* относительно окружности с центром O. Напомню, что:

Полярное соответствие является взаимно однозначным отображением плоскости с выколотой точкой O на себя, то есть каждой точке, кроме O, соответствует прямая (ее поляра), а каждой прямой, не проходящей через точку O, — точка (ее полюс).

Взаимная однозначность этого соответствия следует из *закона взаимности*:

Если поляра точки A проходит через точку B, то поляра точки B проходит через точку A.

Сам принцип двойственности состоит в следующем:

Для любой конфигурации из точек и прямых, в которой определенные точки лежат на определенных прямых, существует двойственная ей конфигурация из прямых и точек, в которой определенные прямые проходят через определенные точки.

Таким образом, для любого утверждения, связанного с такой конфигурацией, существует ему двойственное, получаемое автоматической заменой слов:

Точка	Прямая
Полюс	Поляра
Лежит на...	Проходит через...
Коллинеарные точки	Конкурентные прямые
Трехвершинник (треугольник)	Трехсторонник (треугольник)
Точка окружности	Касательная к окружности в этой точке

При этом одно из утверждений верно тогда и только тогда, когда верно другое. Классический пример двойственных теорем: Менелая и Чевы. Действительно, в теореме Менелая утверждается, что три точки, лежащие на сторонах треугольника, коллинеарны тогда и только тогда, когда выполняется некоторое равенство, а в теореме Чевы — что три прямые, проходящие через вершины треугольника, конкурентны тогда и только тогда, когда выполняется аналогичное равенство.

А вот, казалось бы, контрпример: через любые две различные точки проходит единственная прямая. Постройте двойственное утверждение.

[Любые две различные прямые пересекаются в одной точке.]

Понятно, что это не так. Почему?

Если мы хотим задействовать параллельные прямые, то должны рассматривать проективную плоскость, на которой они пересекаются в бесконечно удаленной точке. При этом на проективной плоскости полярой точки O является бесконечно удаленная прямая, а полюсом прямых, проходящих через точку O, являются точки этой прямой. Тем самым обеспечивается взаимная однозначность полярного соответствия и на проективной плоскости.

Теоремы Паскаля и Брианшона являются проективно двойственными, то есть если в теореме Паскаля заменить точки, лежащие на окружности, на прямые, касающиеся окружности, то коллинеарность точек пересечения трех пар прямых заменяется конкурентностью трех прямых, проходящих через три пары точек. Условно это можно выразить в таблице:

Теорема Паскаля	Теорема Брианшона
$\{A, B, C, D, E, F\} \subset \omega$	a, b, c, d, e, f — касательные к ω
Три точки: $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$, лежат на одной прямой	Три прямые: $a \cap b - d \cap e$, $b \cap c - e \cap f$, $c \cap d - f \cap a$, проходят через одну точку

И последнее. Из теорем Паскаля и Брианшона можно получать верные утверждения для пятиугольников, четырехугольников и треугольников, если рассматривать их как вырожденные шестиугольники.

Пример 1. Пусть в теореме Брианшона совпали две стороны описанного шестиугольника $ABCDEF$: EF и FA. Это означает, что точка F становится точкой касания окружности и EA (рис. 2).

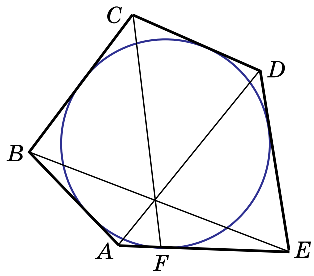


Рис. 2

Конкурентность AD, BE и CF означает, что прямые, соединяющие концы несоседних сторон описанного пятиугольника, и прямая, проходящая через пятую вершину и точку касания противолежащей стороны с окружностью, пересекаются в одной точке.

Пример 2. Пусть в теореме Паскаля совпали две пары вершин вписанного шестиугольника $ABCDEF$: F и A, C и D (рис. 3).

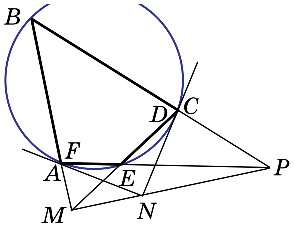


Рис. 3

Тогда во вписанном четырехугольнике $ABCE$ точки M и P попарного пересечения противолежащих сторон и точка N пересечения касательных, проведенных в вершинах A и C, лежат на одной прямой.

Какая еще точка лежит на этой же прямой?

[Точка пересечения касательных, проведенных в вершинах B и E (*изобразить*).]

Предлагаемые задачи разделены на две группы:

1) применение теоремы Брианшона и частных случаев теорем Паскаля и Брианшона;

2) доказательство фактов, связанных со схожими конфигурациями.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Объясните, как получить следствия теорем Брианшона и Паскаля для треугольников, и сформулируйте эти утверждения.

2. Четырехугольник $ABCD$ описанный, E, F, P и Q — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что:

а) точки пересечения прямых AF и CE, AP и CQ лежат на прямой BD;

б) диагонали четырехугольников $ABCD$ и $EFPQ$ пересекаются в одной и той же точке.

3. а) Объясните, как получить следствие теоремы Паскаля для пятиугольника, и сформулируйте это утверждение.

б) Объясните, как построить касательную к окружности в данной ее точке, пользуясь только линейкой.

4. Докажите теорему Брианшона с помощью выхода в пространство.

5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$:

$$AB = BC,\ CD = DE,\ EF = FA,\ \angle A = \angle C = \angle E.$$

Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

6. Прямая Гаусса. а) Докажите, что если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

б) Докажите, что на этой же прямой лежит точка пересечения средних линий четырехугольника.

7. Теорема Ньютона. Докажите, что во всяком описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

Решение задач

1. а) Пусть в описанном шестиугольнике $ABCDEF$:

$$B \in AC,\ D \in CE,\ F \in EA,$$

тогда B, D и F — точки касания (рис. 4).

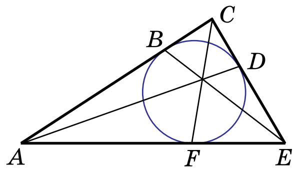


Рис. 4

Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности и противолежащей стороны, пересекаются в одной точке (*теорема Жергонна*).

б) Пусть во вписанном шестиугольнике $ABCDEF$:

$$F \equiv A,\ B \equiv C,\ D \equiv E,$$

тогда FA, BC и DE — касательные к описанной окружности (рис. 5).

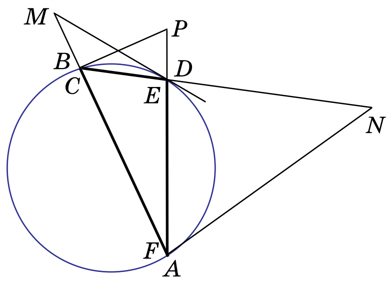


Рис. 5

Комментарий. Касательные к описанной окружности, проведенные в вершинах треугольника, пересекают противолежащие стороны в трех коллинеарных точках.

2. а) Рассмотрим вырожденный описанный шестиугольник $AEBFCD$ (рис. 6).

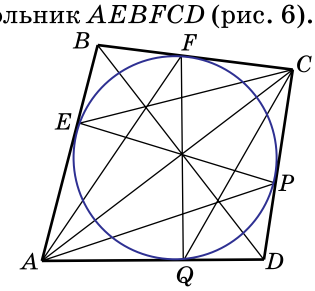


Рис. 6

По теореме Брианшона, AF, EC и BD пересекаются в одной точке. Аналогично, рассматривая шестиугольник $AQDPCF$, получим, что AP, QC и DB пересекаются в одной точке.

б) Применяя теорему Брианшона к описанным четырехугольникам $ABFCDQ$ и $AEBCPD$, получим, что прямые, соединяющие точки касания противолежащих сторон описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения его диагоналей, что равносильно утверждению задачи.

3. а) Пусть во вписанном шестиугольнике $ABCDEF$ $F \equiv A$ (рис. 7).

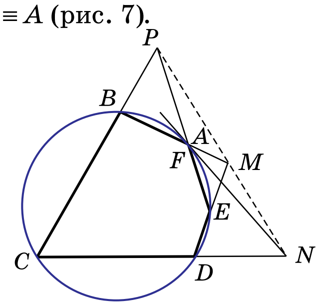


Рис. 7

Во вписанном пятиугольнике точки пересечения двух пар несоседних сторон и точка пересечения пятой стороны с касательной, проведенной в противолежащей вершине, коллинеарны.

б) Пусть дана окружность и принадлежащая ей точка A (см. рис. 7). Выберем на окружности еще четыре точки: B, C, D и E. Построим точки

$$M = AB \cap DE \text{ и } P = BC \cap EA.$$

Пусть

$$N = CD \cap MP,$$

тогда NA — искомая касательная.

Комментарий. Отметим, что способ построения не изменится, если в условии задачи заменить окружность на эллипс, параболу или гиперболу.

4. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ описан около окружности. К плоскости шестиугольника восставим перпендикуляры AA', BB', CC', DD', EE' и FF' соответственно равные отрезкам касательных, из этих вершин так, чтобы они лежали по разные стороны от плоскости «через один» (рис. 8).

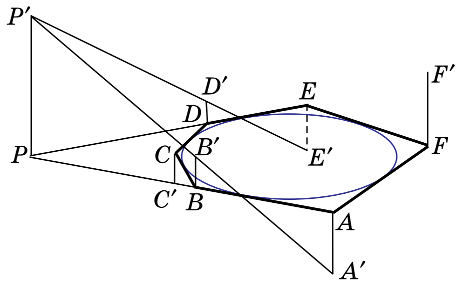


Рис. 8

Докажем, что прямые $A'B'$ и $E'D'$ лежат в одной плоскости. Действительно, если $AB \parallel DE$, то эти прямые параллельны. Если же

$$AB \cap DE = P,$$

то

$$(AA'B) \cap (DD'E) = PP',$$

где $PP' \perp (ABC)$. Пусть точка P' лежит по ту же сторону от плоскости, что и точки B' и D', а отрезок PP' равен отрезку касательной к окружности, проведенной через точку P Тогда

$$A'B' \cap E'D' = P'.$$

Следовательно пересекаются и прямые $A'D'$ и $B'E'$.

Аналогично доказывается, что каждая из этих прямых пересекается с $C'F'$. Так эти три прямые не лежат в одной плоскости, то они все пересекаются в одной точке M'. Тогда и их проекции AD, BE и CF на плоскость шестиугольника пересекаются в точке M, которая является проекцией M'.

5. Проведем биссектрисы углов B, D и F данного шестиугольника. Из условия задачи следует, что они являются серединными перпендикулярами к отрезкам AC, CE и EA, поэтому пересекаются в одной точке — центре O окружности, описанной около треугольника ACE (рис. 9).

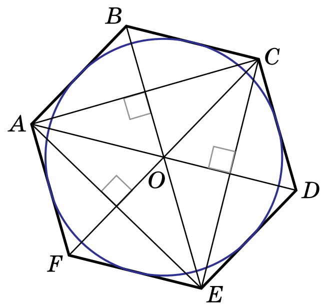


Рис. 9

Из осевых симметрий относительно BO, DO и FO следуют равенства:

$$\angle BAO = \angle BCO,\ \angle DCO = \angle DEO,\ \angle FAO = \angle FEO.$$

Кроме того,

$$\angle BAO + \angle FAO = \angle A = \angle C = \angle BCO + \angle DCO,$$

значит,

$$\angle FAO = \angle DCO.$$

Аналогично,

$$\angle BCO = \angle FEO,$$

значит, эти шесть углов между собой равны. Следовательно, AO, CO и EO также являются биссектрисами углов данного шестиугольника, то есть O — центр вписанной в него окружности. По теореме Брианшона, главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

6. а) Предварительно сформулируем и докажем лемму.

Лемма о трех параллелограммах. Через точку M, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые PR и QS, параллельные сторонам BC и AB (рис. 10).

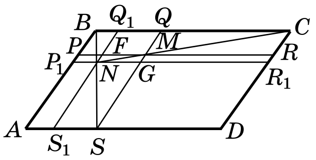


Рис. 10

Тогда прямые BS, PD и MC пересекаются в одной точке.

Доказательство. Через точку N пересечения прямых BS и CM проведем отрезки Q_1S_1 и P_1R_1 с концами на сторонах параллелограмма, параллельные отрезкам QS и PR соответственно. Пусть F и G — точки пересечения PR и Q_1S_1, P_1R_1 и QS соответственно.

Так как точка M лежит на диагонали NC параллелограмма NQ_1CR_1, то

$$S_{FQ_1QM} = S_{MRR_1G},$$

значит,

$$S_{NQ_1QG} = S_{NFRR_1}.$$

Точка N лежит на диагонали BS параллелограмма $ABQS$, поэтому

$$S_{AP_1NS_1} = S_{NQ_1QG} = S_{NFRR_1}.$$

Следовательно, точка N лежит на диагонали PD параллелограмма $APRD$.

Комментарий. Другие способы доказательства леммы используют векторы или массы.

Пусть теперь E и F — точки пересечения продолжений сторон данного четырехугольника. Обозначим вершины четырехугольника так, что E — точка пересечения продолжений сторон AB и CD за точки B и C; F — точка пересечения лучей BC и AD (рис. 11). Достроим треугольники AEF и ABD до параллелограммов $AERF$ и $ABLD$.

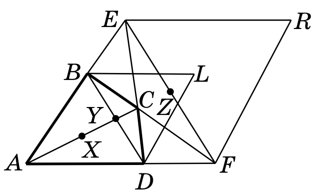


Рис. 11

При гомотетии с центром A и коэффициентом 2 середина X диагонали AC, середина Y диагонали BD и середина Z отрезка EF переходят в точки C, L и R соответственно. Согласно доказанной лемме точки C, L и R лежат на одной прямой. Следовательно, на одной прямой лежат точки X, Y и Z.

Другой способ — несколько раз использовать теорему Менелая.

б) Точка пересечения средних линий является серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей. Это следует из того, что середины диагоналей и середины противолежащих сторон являются вершинами параллелограмма.

Комментарий. Отметим, что окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, на которой лежат ортоцентры треугольников ABF, ADE, BCE и CDF. Она перпендикулярна прямой Гаусса (см. задачу 8 «б» занятия «Радикальная ось») и называется прямой Обера–Штейнера.

7. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, O — центр вписанной в него окружности, r — ее радиус, N и K — середины диагоналей AC и BD соответственно (рис. 12).

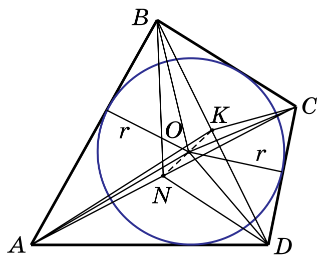


Рис. 12

Если $ABCD$ — ромб, то указанные в условии точки совпадают. В противном случае заметим, что

$$S_{ANB} + S_{DNC} = \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{2}S_{ADC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Аналогично,

$$S_{AKB} + S_{DKC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Кроме того,

$$S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}CD \cdot r =$$

$$= \frac{1}{2}(AB + CD)r = \frac{1}{2}(AD + BC)r.$$

Значит,

$$S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Но геометрическим местом точек M, лежащих внутри $ABCD$ и для которых

$$S_{AMB} + S_{CMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

является отрезок (см. задачу 7 «б» занятия для 8-го класса «Построения и ГМТ, связанные с площадями», которая является частным случаем теоремы Анна). Следовательно, точки N, O и K лежат на одной прямой.

И. БАРЫШЕВ,
А. БЛИНКОВ,
А. ГРИБАЛКО,
Н. НАКОНЕЧНЫЙ,
В. ШАПАРИНА,
И. ЭЛЬМАН,
г. Москва

7 класс

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

Математическая регата 7-х классов прошла 20 апреля 2019 года в Московском городском дворце детского (юношеского) творчества при финансовой поддержке Департамента образования г. Москвы. Организационную и техническую поддержку регаты осуществлял Московский центр непрерывного математического образования.

По традиции, каждый участник и руководитель команды по окончании регаты получили небольшую брошюру с условиями и решениями задач только что прошедшей регаты. Эти специальные выпуски регулярно готовятся коллективом редакции «Архимед» под руководством П.В. Чулкова (издание АНО «Институт логики» и редакции «Архимед»).

В регате 7-х классов участвовало 90 команд. Помимо команд из многих школ Москвы, в ней приняли участие команды из Подмосковья — городов Дмитров, Долгопрудный, Дубна, Королев, Раздоры, Раменское и Черноголовка, а также из Чувашии — команда из г. Чебоксары.

Математической литературой (традиционно предоставляемой МЦНМО) были награждены 17 команд. Дипломами Турнира Архимеда первой, второй и третьей степени были награждены 15 лучших команд. Победителями регаты стали одна из команд ФМШ № 2007 и одна из команд лицея «Вторая школа» (обе из Москвы).

Полные итоги регаты опубликованы по адресу http://olympiads.mccme.ru/regata. Там же можно найти материалы регат предыдущих лет, которые ежегодно публикуются и на страницах журнала «Математика». Подробно о том, как проводятся математические регаты, и материалы всех прошедших регат — см.: Московские математические регаты / сост.: А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, Е.С. Горская. — М.: МЦНМО, 2014 (в двух частях).

Как обычно, часть заданий для регаты придумывалась авторами специально для нее, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы.

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. Когда бочка пуста на 30%, она содержит на 30 литров больше меда, чем когда она заполнена на 30%. Сколько литров меда в полной бочке?

1.2. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 4 часа 12 минут?

1.3. В пачке 20 карточек: синие, красные и желтые. Синих в шесть раз меньше, чем желтых, а красных меньше, чем желтых. Какое наименьшее количество карточек надо вытащить, не глядя, чтобы среди них обязательно оказалась красная?

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. На бирже Цветочного города 1 лимон и 1 банан можно обменять на 2 апельсина и 23 вишни, а 3 лимона — на 2 банана, 2 апельсина и 14 вишен. Что дороже: лимон или банан?

2.2. Точки A, B и C лежат на прямой m, а точки D и E на ней не лежат. Известно, что

$$AD = AE \text{ и } BD = BE.$$

Докажите, что $CD = CE$.

2.3. В шестиугольниках записаны цифры и знаки арифметических действий так, как показано на рисунке 1. Требуется, начав с одного из шестиугольников и переходя в соседний, обойти все по одному разу. При этом надо записывать в строку то, что в них написано, и в итоге получить верное равенство. Какое?

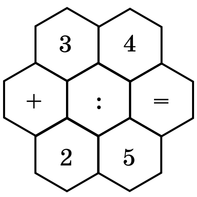


Рис. 1

Третий тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

3.1. Велосипедист проделал путь из пункта A в пункт B, где пробыл 30 минут, и вернулся в A. По пути в B он обогнал пешехода, а через 2 часа встретился с ним на обратном пути. Пешеход прибыл в B одновременно с тем, когда велосипедист вернулся в A. Сколько времени потребовалось пешеходу на путь из A в B, если его скорость в четыре раза меньше скорости велосипедиста?

3.2. Два квадрата на рисунке 2 имеют общую сторону AB. На диагонали одного из них отметили точку K, расстояние от которой до вершины C другого квадрата равно его диагонали. Найдите угол ACK.

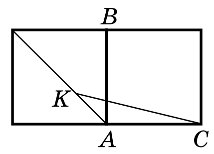


Рис. 2

3.3. Известно, что каждое из трех двузначных чисел получается из суммы двух других чисел перестановкой цифр. Чему равна сумма всех трех чисел?

Четвертый тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

4.1. Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по семь из этих чисел, а Вася — все возможные суммы по восемь из этих чисел. Могло ли так случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)

4.2. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC — точка N так, что $BN = MC$. Найдите угол между прямыми AN и BM.

4.3. Может ли являться квадратом число, десятичная запись которого состоит из нескольких (*более одной*) одинаковых цифр?

Ответы, решения, комментарии

1.1. 75 литров.

Способ I. Если бочка пуста на 30%, значит, она заполнена на 70%, то есть 30 литров составляют 40% ее объема. Следовательно, 10% объема бочки — это 7,5 л, а весь объем — это 75 л.

Способ II. Пусть объем бочки — x литров. По условию задачи составим уравнение и решим его:

$$0{,}7x = 0{,}3x + 30,\ 0{,}4x = 30,\ x = 75.$$

1.2. 54°.

Способ I. В 12.00 каждая из стрелок направлена вертикально вверх. Найдем углы, которые каждая из стрелок составляет с этим положением в 4 часа 12 минут.

Часовая стрелка каждый час поворачивается на 30°, а за 12 минут повернется еще на $30° : 5 = 6°$.Таким образом, она составит с вертикалью угол, равный 126° (рис. 3).

Минутная стрелка за 12 минут повернется на пятую часть от своего полного оборота, то есть на $360° : 5 = 72°$. Следовательно, искомый угол равен $126° - 72° = 54°$.

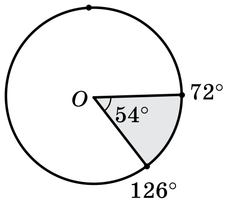


Рис. 3

Способ II. В 4.00 минутная стрелка направлена вверх, а часовая прошла от вертикального положения 20 минутных делений. Еще за 12 минут минутная стрелка повернется на 12 делений, а часовая — на одно минутное деление, так как 12 минут составляют пятую часть часа. Значит, между часовой и минутной стрелками $21 - 12 = 9$ минутных делений. Учитывая, что одно минутное деление составляет $360° : 60 = 6°$, получим, что угол между стрелками равен 54°.

1.3. 15 карточек.

Если синяя карточка одна, то желтых 6, а красных $20 - 1 - 6 = 13$. Но тогда красных карточек больше, чем желтых, — противоречие.

Если синих карточек две, то желтых 12, а красных $20 - 2 - 12 = 6$. Этот случай удовлетворяет условию. Тогда если вытащить из пачки не более 14 карточек, то среди них могут оказаться только синие и желтые. А если вытащить 15 карточек, то среди них обязательно будет хотя бы одна красная.

Если же синих карточек не менее трех, то желтых не меньше 18, что в сумме составляет не меньше 21. Значит, этот случай невозможен.

2.1. Лимон дороже.

Обозначим стоимости одного фрукта: лимона — L, банана — B, апельсина — A, вишни — V.

Способ I. Из условия задачи получим равенства, они должны выполняться одновременно:

$$\begin{cases} L+B=2A+23V, \\ 3L=2B+2A+14V. \end{cases}$$

Умножим обе части второго равенства на 2:

$$6L = 4B + 4A + 28V.$$

Используя первое равенство, получим:

$$4A + 28V > 2A + 23V = L + B.$$

Следовательно,

$$6L > 4B + L + B,\ L > B.$$

Способ II. Предположим, что $L \le B$, тогда $2L \le 2B$. Так как три лимона можно обменять на два банана, два апельсина и 14 вишен, то

$$L \ge 2A + 14V.$$

Так как один лимон и один банан обмениваются на два апельсина и 23 вишни, получим:

$$B \le 9V < 14V + 2A \le L,$$

то есть $B < L$. Это противоречит исходному предположению, значит, лимон дороже банана.

2.2. Так как $AD = AE$, то точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку DE (рис. 4).

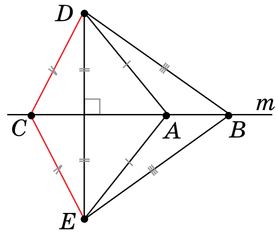


Рис. 4

Аналогично, точка B лежит на серединном перпендикуляре к DE. Учитывая, что двумя точками прямая определяется однозначно, получим: прямая AB — серединный перпендикуляр к отрезку DE. Так как точка C лежит на серединном перпендикуляре к DE, то C равноудалена от D и E, то есть $CD = CE$, что и требовалось.

Комментарий. Можно рассуждать, используя равенство треугольников, но это потребует отдельного доказательства того, что точки D и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, а также рассмотрения различных случаев взаимного расположения на прямой точек A, B и C.

2.3. $5 = 4 : 2 + 3$.

Комментарий. Приведенный ответ единственный, но доказывать это не требуется.

3.1. 10 часов.

Способ I. Расстояние, которое пешеход проходит за 2 часа, примем за единицу. Тогда велосипедист проезжает это же расстояние за 30 минут. С момента первой встречи пешеход прошел одну единицу, а велосипедист проехал три единицы (полчаса он отдыхал в пункте B). Значит, расстояние от точки их второй встречи до пункта B равно одной единице. Тогда после второй встречи пешеход пройдет еще одну единицу, а велосипедист за это время проедет четыре единицы. Поэтому расстояние между A и B равно пяти единицам, следовательно, пешеходу на путь из A в B потребовалось 10 часов.

Способ II. Пусть v км/ч — скорость пешехода, тогда скорость велосипедиста $4v$ км/ч. Пусть первая встреча велосипедиста и пешехода произошла на расстоянии x км от пункта B. Тогда за 2 часа, которые прошли до второй встречи, пешеход прошел $2v$ км и оказался на расстоянии $(x - 2v)$ км от пункта B, а велосипедист проехал расстояние $1{,}5 \cdot 4v = 6v$ км и оказался на расстоянии $(6v - x)$ км от пункта B. Следовательно,

$$x - 2v = 6v - x,\ x = 4v.$$

Значит, точка первой встречи находится от пункта B на расстоянии, которое велосипедист проезжает за час, а точка второй — на расстоянии, которое велосипедист проезжает за полчаса. Так как через 2 часа после второй встречи пешеход окажется в пункте B, а велосипедист в пункте A, то велосипедисту на путь из B в A понадобилось 2,5 часа. Следовательно, пешеходу на путь из A в B понадобится в 4 раза больше, то есть 10 часов.

Способ III. Пусть первая встреча произошла в точке M_1, а вторая — в точке M_2, причем $M_1B = a$ км, $M_2B = b$ км (рис. 5).

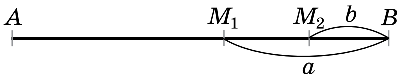


Рис. 5

Тогда путь M_1BM_2, который составляет $(a + b)$ км, велосипедист проехал за 1,5 часа, поэтому его скорость равна $\frac{2}{3}(a+b)$ км/ч. Так как скорость пешехода в 4 раза меньше, то она равна $\frac{1}{6}(a+b)$ км/ч. Путь M_1M_2, который составляет $(a - b)$ км, пешеход прошел за 2 часа. Следовательно, $\frac{1}{6}(a+b)\cdot 2 = a - b$, $a = 2b$.

Значит, скорость пешехода равна $0{,}5b$ км/ч. Так как велосипедист проезжает путь M_2A за то же время, за которое пешеход проходит путь $M_2B = b$ км, то $M_2A = 4b$ км. Следовательно, $AB = 5b$ км. Поэтому пешеходу на путь из A в B потребуется $\frac{5b}{0{,}5b} = 10$ часов.

3.2. 15°.

Способ I. Построим еще два квадрата с общей стороной AD так, как показано на рисунке 6, и проведем отрезки CD и DK.

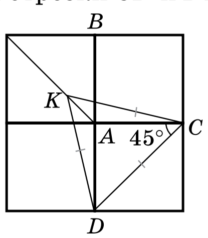


Рис. 6

Тогда полученная картинка симметрична относительно прямой AK, поэтому $CK = DK$.

Кроме того, расстояние между C и K равно диагонали квадрата, значит, треугольник CDK равносторонний, то есть каждый его угол равен 60°.

Так как ADC — равнобедренный прямоугольный треугольник, то $\angle ACD = 45°$. Следовательно,

$$\angle ACK = 60° - 45° = 15°.$$

Способ II. Проведем диагональ BC правого квадрата, которая параллельна диагонали AE левого (рис. 7).

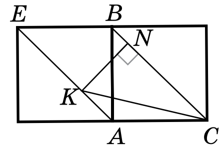


Рис. 7

Заметим, что расстояние между прямыми AE и BC равно половине диагонали квадрата, то есть равно $0{,}5CK$. Тогда длина перпендикуляра KN к прямой BC также равна $0{,}5CK$. В прямоугольном треугольнике KCN катет KN равен половине гипотенузы CK, значит, $\angle KCN = 30°$. Следовательно,

$$\angle ACK = \angle ACN - \angle KCN = 15°.$$

3.3. 99.

Способ I. Пусть x, y и z — данные числа. Из условия следует, что их сумма кратна 11. Действительно, если $x = \overline{ab}$, то $y + z = \overline{ba}$ и тогда

$$x + y + z = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b).$$

Любое натуральное число при делении на 9 дает такой же остаток, что и сумма его цифр. Поэтому числа $x + y$ и z дают одинаковые остатки при делении на 9, следовательно, число $x + y - z$ кратно 9. Аналогично, числа $y + z - x$ и $z + x - y$ кратны 9. Значит, сумма этих трех чисел, равная $x + y + z$, делится на 9.

Таким образом, сумма $x + y + z$ кратна 99. Но так как сумма каждых двух чисел меньше 100, то сумма всех трех меньше 150. Следовательно, искомая сумма равна 99.

Способ II. Пусть $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ и $\overline{ef}$ — данные числа. Из условия задачи следует, что выполняются три равенства:

$$10a + b + 10c + d = 10f + e;$$
$$10c + d + 10e + f = 10b + a;$$
$$10e + f + 10a + b = 10d + c.$$

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$20a + 20c + 20e + 2b + 2d + 2f =$$
$$= 10b + 10d + 10f + a + c + e.$$

После упрощения это равенство примет вид:

$$19(a + c + e) = 8(b + d + f).$$

Так как числа 8 и 19 взаимно простые, то $b + d + f$ делится на 19. Кроме того, эта сумма не больше $3 \cdot 9 = 27$, следовательно,

$$b + d + f = 19,\ a + c + e = 8.$$

Значит,

$$\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = 10(a + c + e) + (b + d + f) = 10\cdot 8 + 19 = 99.$$

Комментарий. Отметим, что числа, указанные в условии, действительно существуют. Это может быть любая тройка двузначных чисел, кратных 9, сумма которых равна 99. Например, 18, 27 и 54.

4.1. Могло.

Рассмотрим любой набор из пятнадцати целых чисел, симметричный относительно нуля. Например, последовательные целые числа от -7 до 7.

Покажем, что он удовлетворяет условию задачи. Заметим, что сумма всех чисел указанного набора равна нулю. Пусть сумма произвольного набора из семи чисел, записанных Петей, равна A, тогда сумма оставшихся восьми чисел исходного набора равна $-A$.

Рассмотрим набор из восьми чисел, им противоположных. Его сумма равна A, и он присутствует среди сумм, выписанных Васей. При этом различным наборам Пети соответствуют различные наборы Васи с той же суммой. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между равными суммами, записанными Петей и Васей, что и требовалось.

Комментарий. Существуют симметричные наборы из пятнадцати чисел, для которых все Петины суммы будут различными, например:

$$-3^6, -3^5, \dots, -1, 0, 1, \dots, 3^5, 3^6.$$

Тогда и все Васины суммы будут различными.

4.2. $45°$.

Пусть прямые AN и BM пересекаются в точке O, тогда угол AOM искомый.

Способ I. Вне треугольника ABC построим квадрат $CEDM$ (рис. 8).

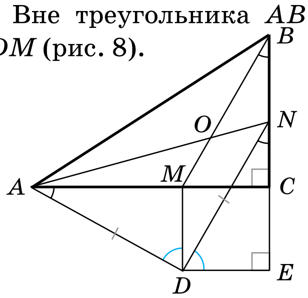


Рис. 8

Тогда

$$EN = CE + CN = CN + CM = CN + NB = CB.$$

Значит, прямоугольные треугольники EDN, CMB и MDA равны по двум катетам:

$$DE = MC = DM \text{ и } EN = CB = MA.$$

Следовательно,

$$ND = AD \text{ и } \angle EDN = \angle MDA.$$

Тогда

$$\angle ADN = \angle MDE = 90°.$$

Таким образом, треугольник AND равнобедренный и прямоугольный, значит, $\angle AND = 45°$. Кроме того, из равенства треугольников следует, что $\angle DNE = \angle MBC$, поэтому $BM \parallel ND$. Тогда

$$\angle AOM = \angle AND = 45°.$$

Комментарий. Для школьников, уже знакомых со свойствами параллелограмма, можно предложить другое рассуждение.

Способ II. Восставим в точке B перпендикуляр к BC, а через точку A проведем прямую, параллельную BM. Пусть они пересекаются в точке K, тогда $AMBK$ — параллелограмм (рис. 9).

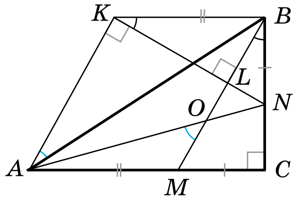


Рис. 9

Тогда $KB = AM = BC$, поэтому прямоугольные треугольники BMC и KNB равны (по двум катетам). Следовательно, $AK = BM = KN$.

Кроме того,

$$\angle CBM = \angle BKN = \alpha,$$

значит,

$$\angle KBL = 90° - \alpha, \angle KLB = 90°.$$

Так как $AK \parallel BM$, то

$$\angle AKN = \angle KLB = 90°.$$

Таким образом, треугольник AKN прямоугольный и равнобедренный, значит, $\angle KAN = 45°$. Тогда, используя ту же параллельность, получим, что

$$\angle AOM = \angle KAN = 45°.$$

4.3. Не может.

Возведя в квадрат цифры от 0 до 9, получим, что квадраты натуральных чисел могут оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Кроме того, точные квадраты при делении на 4 могут давать только остаток 0 или остаток 1. Действительно, квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа $2n + 1$ равен

$$(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1.$$

Поэтому, используя признак делимости на 4, получим, что квадраты не могут оканчиваться на 11, 55, 66 и 99.

Число не может записываться одними нулями, поэтому осталось рассмотреть случай, когда оно состоит из четверок. Разделив его на 4 (которое само является квадратом), получим число, записываемое единицами, — оно, как показано выше, квадратом не является. Значит, и число, записываемое четверками, не может быть точным квадратом.

Комментарий. Можно рассуждать иначе. Указанное число представимо в виде $a\cdot\overline{11\ldots1}$. Значения a, равные 2, 3, 7 и 8, исключаются: на эти цифры точные квадраты оканчиваться не могут. Также a не может быть равно 5 или 6, так как в этих случаях число делится соответственно на 5 или на 2, но не делится соответственно на 25 или на 4. В оставшихся случаях, когда a равно 1, 4 или 9, достаточно показать, что число $\overline{11\ldots1}$ не является точным квадратом. Действительно, $\overline{11\ldots1}$ при делении на 4 дает остаток 3, что невозможно для квадратов натуральных чисел (это показано выше).

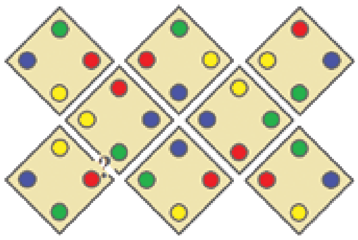
Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

Фото автора

Ведущий рубрики — Николай Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

МОЗАИКА

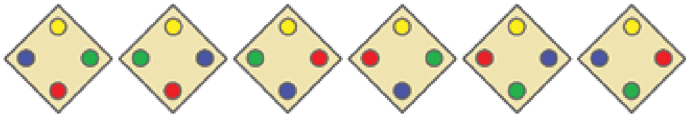
■ Головоломок с таким названием, но совершенно разных по содержанию, придумано несколько. Познакомимся с одной из них. Она содержит восемь квадратных фишек, в углах которых расположены цветные кружки, и чем-то напоминает домино, потому что фишки нужно прикладывать друг к другу так, чтобы цвета соприкасающихся кружков совпадали. Все фишки вместе должны образовать симметричную фигуру, изображенную на рисунке. Здесь головоломка почти в сборе, во всех парах соприкасающихся кружков цвета совпадают, и лишь в одной паре, помеченной вопросительным знаком, цвета разные!



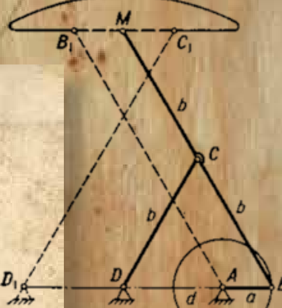
Еще одна приятная особенность головоломки — она проста в изготовлении. Аккуратно вырежем квадратики из плотного картона или фанеры. Кружочки сделаем из цветной бумаги с помощью дырокола, подобрав цвета в соответствии со схемой, и приклеим их в углах каждой фишки. Можно использовать самоклеящуюся бумагу, тогда проблем с приклеиванием кружков будет меньше. Для удобства восьмиклеточную фигуру можно нарисовать на отдельном листе бумаги, тогда легче будет выдержать ее форму. Проделав все это, можно приступать к решению головоломки.

Для поиска решения головоломки проанализируем расстановку цветных кружков в углах квадратных фишек. Так как используются четыре цвета без повторений, то существует всего шесть различных способов. В самом деле, если в верхнем углу желтый кружок, то напротив по диагонали может быть расположен зеленый, красный или синий. Для каждого из этих трех вариантов есть два продолжения. Например, для диагональной желто-зеленой пары есть сине-красная пара и красно-синяя пара. Таким образом, всего существует $3 \cdot 2 = 6$ различных по раскраске фишек.

Значит, в головоломке из восьми фишек есть две пары фишек одинаковой раскраски. Действительно, в показанном игровом наборе первая и последняя фишки имеют «двойников».



Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.



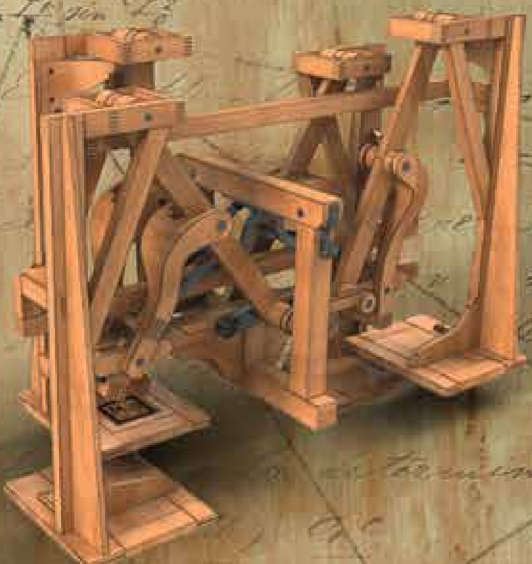
Чебышев П.Л.

Чебышёв — выдающийся русский математик, механик, изобретатель, педагог и военный инженер, которого называли русским Архимедом, основоположник петербургской математической школы.

Пафнутий Львович Чебышёв родился 16 мая 1821 года в Калужской губернии, в семье богатого землевладельца, представителя старинного русского дворянского рода. Одним из детских увлечений будущего ученого было изучение механизмов игрушек, которые он сам придумывал и мастерил. Образование он получил в Москве, окончив Императорский Московский университет, физико-математическое отделение философского факультета. Основные математические исследования П.Л. Чебышёва относятся к теории чисел, теории вероятностей, теории приближения функций, математическому анализу, геометрии, прикладной математике.

Творческий метод Чебышёва отличало стремление к увязке проблем математики с вопросами естествознания и техники и к соединению абстрактной теории с практикой. Он писал: «Сближение теории с практикою даёт самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает: сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных».

В качестве члена Ученого комитета Министерства народного просвещения П.Л. Чебышёв рецензировал учебники, составлял программы и инструкции для начальных и средних школ. Для Чебышёва не меньшее значение, чем конкретные научные результаты, всегда имела задача развития российской математической школы, он был замечательным научным руководителем, обладавшим редкой способностью удачно выбирать и точно ставить перед молодыми исследователями новые вопросы, рассмотрение которых обещало привести к ценным открытиям.



ISSN 2658-4042 19006
9 772658 404196